UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS II – ALAGOINHAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
PÓS GRADUAÇÃO *LATO SENSU* EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GLEICIMAR BARBOSA DE JESUS

ESTRATÉGIAS DE GENERALIZAÇÃO MOBILIZADAS POR ALUNOS DO 7° ANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO PADRÕES MATEMÁTICOS

Alagoinhas
2017

GLEICIMAR BARBOSA DE JESUS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS II – ALAGOINHAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
PÓS GRADUAÇÃO *LATO SENSU* EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ESTRATÉGIAS DE GENERALIZAÇÃO MOBILIZADAS POR ALUNOS DO 7° ANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO PADRÕES MATEMÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Pós-graduação *Lato Sensu* em Educação Matemática da Universidade do Estado da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Grace Dórea Santos Baqueiro.

Alagoinhas
2017

GLEICIMAR BARBOSA DE JESUS

ESTRATÉGIAS DE GENERALIZAÇÃO MOBILIZADAS POR ALUNOS DO 7° ANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO PADRÕES MATEMÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade do Estado da Bahia – UNEB para obtenção do título parcial de Especialista em Matemática.

Alagoinhas, _________de _____________________________de 2017.

Banca Examinadora

____
Prof.ª Dr. ª Grace Dórea Santos Baqueiro
Orientadora

____
Prof.º Msc José Carlos Santana Queiroz
Universidade do Estado da Bahia

____
Prof.ª Dr. ª Maria Eliana Santana da Cruz Silva
Universidade do Estado da Bahia

Dedico este trabalho as professoras Maridete e Grace Dórea. A primeira, pelo incentivo a retomar quando eu pensava que não havia mais tempo, e a segunda pela disposição, dedicação, atenção e compreensão durante o desenvolvimento da presente pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

A Deus, primeiramente, por ter sido tão presente em minha vida, me dando forças para passar com êxito por muitos momentos difíceis.

Aos meus pais por terem sido sempre uma base sólida para a minha formação pessoal e profissional.

A minha irmã Daniela pelo grande apoio de sempre, como amiga, companheira, secretária, psicóloga dentre outras.

A meu esposo Inacson, pelas madrugadas que ficava acordado ao meu lado me dando forças e preparando lanches em quanto eu estudava.

Aos colegas da pós-graduação, em especial Rosana e Gustavo por tornarem os finais de semana de aula mais leves e divertidos.

A professora Maridete por ter sido a precursora da retomada deste trabalho.

A professora orientadora deste trabalho Grace Dórea por ter aceitado o desafio de me orientar em um curtíssimo espaço de tempo, e ter feito isso com muita dedicação e paciência, sendo peça fundamental para a concretização da pesquisa.

Aos meus sobrinhos, Stefanie, Cailane e Gabriel por colaborarem resolvendo a atividade de análise da pesquisa a meu pedido.

Enfim, obrigada a todos que contribuíram de alguma maneira para a realização dessa pesquisa!

Eu posso fazer tudo através Dele, que me dá força.

(Filipenses 4:13)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar as estratégias utilizadas por alunos do sétimo ano na resolução de problemas envolvendo padrões matemáticos. A questão norteadora deste trabalho foi: *Quais as estratégias utilizadas pelos alunos do sétimo ano para resolver problemas envolvendo padrões?* Para responder este questionamento utilizamos como base para o referencial teórico as classificações de estratégias de resolução de problemas com generalização de padrão feitas por Barbosa (2009). A pesquisa foi caracterizada como qualitativa do tipo exploratória com relação a seus objetivos, aplicando uma atividade que foi adaptada de um trabalho de Vale (2011). Os dados foram coletados em uma escola do município de Catu/Ba, a qual a autora da pesquisa leciona, com uma turma de sétimo ano composta por trinta alunos com idade média de doze anos. Os resultados mostram que é possível trabalhar com situações-problema envolvendo padrões matemáticos com alunos do sétimo ano. Através da análise dos dados percebemos que os alunos apesar de não terem sido submetidos a este tipo de atividade antes, se sentiram desafiados com a mesma, mostrando capacidades de generalização distantes e algébricas. A análise dos resultados possibilitou perceber que a estratégia mais utilizada pelos alunos foi a explícita, seguida da contagem e da diferença recursiva tal como acontece na pesquisa realizada por Pereira e Fernandes (2012).

Palavras-chave: Estratégias de resolução, Resolução de problemas, Padrões matemáticos, Generalização.

ABSTRACT

This inquiry has as I aim to investigate the strategies used by pupils of the seventh year in the resolution of problems wrapping mathematical standards. The question norteadora of this work was: Which the strategies used by the pupils of the seventh year to resolve problems wrapping standards? To answer this questionamento we use like base for the theoretical referential system the classifications of strategies of resolution of problems with standard generalization done by Barbosa (2009). The inquiry was characterized how qualitative of the type exploratória regarding his objectives, applying an activity that was adapted of a work of Valley (2011). The data were collected in a school of the local authority of Catu/Ba, which the author of the inquiry teaches, with a group of seventh year composed by thirty pupils with middle age of twelve years. The results show that it is possible to work with situations-problems wrapping mathematical standards with pupils of the seventh year. Through the analysis of the data we realize that the pupils in spite of they had not been subjected to this type of activity before, felt challenged with same, showing distant and algebraic capacities of generalization. The analysis of the results made possible to realize that the strategy most used by the pupils was explicit, followed of the counting and of the difference recursiva such as it happens in the inquiry carried out by Pear tree and Fernandes (2012).

Key Words: Strategies of resolution, Resolution of problems, mathematical Standards, Generalization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve a intenção de investigar as estratégias utilizadas, por alunos do sétimo ano de uma escola da rede privada, na resolução de problemas envolvendo padrões. Sabendo que a ferramenta generalização de padrões é pouco utilizada por nós professores nas aulas de matemática, esta pesquisa pode contribuir para a socialização entre docentes sobre a importância dos problemas com padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Para isso, foi feito um levantamento bibliográfico à respeito do tema, além de um breve estudo sobre estratégias de resolução de problemas envolvendo padrões, através de um trabalho desenvolvido por Barbosa (2010).

O primeiro capítulo apresenta a problemática da pesquisa, justificando a escolha do tema numa trajetória que se inicia na vida escolar da autora, até o início deste trabalho. Em seguida é apresentado um pouco da história do surgimento das letras no ensino de álgebra, além de expor relações entre a álgebra, o pensamento algébrico e resoluções de problemas através de padrões matemáticos. Ainda neste capítulo é feita a exposição da nossa questão de pesquisa, bem como o nosso objetivo geral.

O segundo capítulo constitui o nosso referencial teórico e expõe um estudo sobre as estratégias utilizadas na resolução de problemas com padrões matemáticos, usando um exemplo de atividade encontrado em um trabalho de Barbosa (2009), que servirá de base para o nosso estudo.

O terceiro capítulo mostra os procedimentos metodológicos aplicados para o desenvolvimento da pesquisa além de apresentar a atividade que foi aplicada aos alunos do sétimo ano de uma escola da rede privada como o nosso instrumento de pesquisa utilizado.

O quarto parágrafo expões a análise dos dados da pesquisa, que foram analisados um item por vez com as 13 duplas que realizaram a atividade proposta.

Finalizando o trabalho mostramos as nossas considerações finais, à respeito da trajetória da pesquisa e da análise dos dados, expondo as vantagens para o desenvolvimento do pensamento dos alunos, em dar aula de matemática usando os problemas que envolvem generalização de padrão.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

Passei a minha vida escolar inteira na mesma escola e praticamente com os mesmos colegas, era uma escola filantrópica de muita qualidade de ensino e disciplina. Entrei aos cinco anos de idade como aluna bolsista e a condição para renovação da bolsa era aprovação com média sete em todas as disciplinas no final do ano letivo. Não tive dificuldades durante o meu ensino fundamental, pois já estava bem adaptada à escola e sempre gostei de estudar. Tive bons professores de matemática, que ensinavam de forma tradicional, porém significativa.

Ao terminar o ensino fundamental, passei por uma seleção para cursar o ensino médio em outra escola da mesma rede a qual eu já estudava. Fui aprovada. Apesar de ser uma escola da mesma rede a qual eu estudei a vida inteira, tive muita dificuldade, principalmente em matemática e química. Nestas disciplinas, eram muitos conteúdos os quais eu não conseguia perceber aplicações para estudá-los. Para mim, era uma matemática diferente da qual eu tinha estudado até então. O professor de matemática, demonstrava ter muito conhecimento na área de matemática pura, porém pouca didática e metodologia de ensino. Suas aulas se resumiam à resolução das questões de concursos e vestibulares mais difíceis. Eu não me adaptei a esta metodologia, e acabei sendo reprovada ao final do ano em química e em matemática. De acordo com as regras da escola eu deveria perder a bolsa de estudos, mas por ser uma aluna de bom comportamento e disciplina, tive a oportunidade de continuar na escola e repetir o primeiro ano do ensino médio.

Ao repetir a série tive a oportunidade de estudar com um professor de matemática, contratado naquele ano pela escola. Para minha sorte, ele era bem diferente do primeiro. Ensinava de forma muito detalhista e significativa. Voltei a me encantar com a matemática que conheci no ensino fundamental, pois conseguia relacionar as questões matemáticas com o cotidiano. Fui aprovada ao final do curso, e até terminar o ensino médio não tive mais dificuldade em estudar matemática e nem química, pois esta também me despertou uma paixão aparentemente até maior que a matemática.

Finalizando o ensino médio ingressei no curso de licenciatura em matemática da UNEB, mesmo não sendo esta a minha primeira opção, pois estava ainda mais encantada por química, que por questões financeiras, não pude cursar. No entanto, estava certa da minha segunda opção. Ao iniciar a minha graduação não gostei muito das disciplinas voltadas para educação, me senti um pouco decepcionada, mas não demorou em começar as matérias de cálculo e eu me animar. Durante toda a graduação sempre dei mais atenção para as disciplinas voltadas para a área de matemática pura, e foi nessa linha que quis escrever o meu trabalho de conclusão de curso, porém posteriormente preferi pesquisar sobre história da matemática.

Ao concluir a graduação, partir para iniciar a minha carreira docente e me surpreendi com a falta que sentia das disciplinas de educação matemática que tanto desprezei. Elas eram peças chave para juntar com o conhecimento matemático que tinha e assim desenvolver uma boa prática de ensino. Foram alguns anos lidando com essa falta. Tive então a oportunidade de participar de alguns cursos de formação continuada, oferecidos pela prefeitura a qual eu trabalhava e estes cursos me ajudaram bastante a sanar algumas dificuldades na área da educação matemática.

Quando fiquei sabendo da seleção para um curso de especialização em educação matemática, fiquei muito animada, pois enxerguei nesta, a possibilidade de melhorar a minha prática pedagógica e poder dar a importância devida às disciplinas que eu não me importei durante a graduação. E assim foi feito. Me dediquei bastante ao curso e foi a partir daí que me identifiquei com as tendências matemáticas, em especial a resolução de problemas. Foi então, que pensando nas dificuldades vividas por mim em sala de aula com o ensino de álgebra, desenvolvi junto com uma colega um projeto de pesquisa voltado para resolução de problemas, algo que nos identificamos, e para o ensino de álgebra, algo que eu precisava aprender de uma forma diferenciada e significativa.

Porém, por motivos de força maior a pesquisa não pode ser iniciada no tempo previsto pelo programa do Curso. Com o incentivo e boa vontade de algumas professoras, pude retomar o projeto, mas com um problema que é o do tempo bastante curto, o qual se resumiu a apenas um mês e meio para a elaboração,aplicação e conclusão do trabalho. Portanto, delimitamos a pesquisa para o ensino de álgebra nas séries iniciais do ensino fundamental II, sem deixar de lado o tema Resolução de Problemas. Segundo Usiskin (1995, apud PINHEIRO, 2013) o estudo da álgebra constitui um campo muito importante no desenvolvimento do conhecimento matemático, pois a partir da álgebra é possível obter meios para caracterizar e compreender diversas estruturas matemáticas.

A realização desta pesquisa será de extrema importância para a minha formação acadêmica, além de estar contribuindo para responder as minhas inquietações e a de muitos outros docentes, à respeito do ensino de álgebra.

1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DO SURGIMENTO DO USO DAS LETRAS

Os professores de matemática tem o hábito de falar que o ensino de álgebra - que é um ramo da matemática a qual possui escrita e símbolos próprios - se inicia no 7º ano do ensino fundamental II, quando são inseridas as letras aos cálculos matemáticos. Mas ao contrário do que muitos pensam o estudo de álgebra já acompanha os alunos desde as suas séries iniciais. Nesta seção será apresentada um pouco da história da álgebra, mostrando que há muito tempo esta já era utilizada, porém sem o uso de letras.

Segundo Usiskin (1995, apud PINHEIRO, 2013) há evidências de que há muito tempo atrás, os babilônios já possuíam uma noção algébrica, mas sem utilizar os símbolos como é feito hoje. Eles usavam a álgebra para resolver problemas por meio de regras na forma de textos sem nenhum tipo de abreviação. Nos dias atuais esses problemas seriam facilmente resolvidos por meio de equações de forma muito mais simples, devido aos símbolos e regras que usamos.

Ainda de acordo com Usiskin (1995, apud PINHEIRO, 2013) tempos depois o matemático grego Diofanto começou a introduzir símbolos para simplificar a escrita. E mais tarde o árabe Abu Abdullah Mohammed ben Musa Al-Khwarizmi introduz novos símbolos indianos para representar algarismos e um círculo para representar o zero, além de descrever operações de cálculo. Mas foi François Viète que introduziu o uso de letras para representar quantidades desconhecidas. Porém a construção da álgebra com todos os símbolos que utilizamos hoje se concretiza com René Descartes grande matemático e filósofo.

Na seção seguinte será abordado o ensino de álgebra nos dias atuais relacionando-a com o pensamento algébrico.

1.2 ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Segundo Vale e Pimentel (2011) o ensino de álgebra era tradicionalmente associado ao uso formal do simbolismo algébrico, porém nos últimos anos têm surgido recomendações curriculares para a introdução de formas de pensamento algébrico a partir dos primeiros anos.

Segundo Vale e Pimentel (apud Kieran, 2011) o pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade é definido como o desenvolvimento de modos de pensar, que não são exclusivos da álgebra como por exemplo: analisar relações entre quantidades, descobrir a estrutura, generalizar, resolver problemas, modelar, predizer, justificar e provar, e para os quais o simbolismo da álgebra pode ser, ou não, usado como ferramenta. A autora acima considera importante realizar alguns ajustes no ensino para que a transição da aritmética para a álgebra seja bem sucedida dentre elas estão:

> “[...] (1) O foco nas relações e não meramente no cálculo de respostas numéricas; (2) o realce nas operações e nas suas inversas e na ideia relacionada de fazer e desfazer; (3) o foco na representação e resolução simultânea de problemas em vez de apenas na resolução; (4) a utilização de números e letras em vez de apenas números; e (5) a reformulação do significado do sinal de igual, que normalmente é encarado como um separador entre o problema e a solução, ou seja, um indicador para efetuar as operações constantes do lado esquerdo.” (Vale e Pimentel, 2011, p. 107)

Vale e Pimentel (2011) defendem que a introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos pode ser, para além de outros aspetos importantes, um bom veículo para a utilização de tarefas que exijam o envolvimento com conceitos e estruturas matemáticas e estimulem os alunos a fazer conexões de modo a atribuir significado a ideias matemáticas relevantes.

O próximo ponto de discussão da pesquisa será o desenvolvimento do pensamento algébrico, tendo como instrumento os padrões.

1.3 PADRÃO, PENSAMENTO ALGÉBRICO E GENERALIZAÇÃO

Para Vale (2012) pensamento algébrico diz respeito à simbolização, ao estudo de estruturas e a modelação. E, além disso, implica em conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado.

Vale (2012) afirma que é necessário que o objeto fundamental da álgebra não se reduza a resolução de equações, como tem sido até os dias atuais. A autora afirma ainda que antes de avançar para uma aplicação mais automática de regras é fundamental desenvolver o sentido do símbolo.

A realização de tarefas que envolvem o estudo de padrões constituem para Vale (2012) um auxílio para os alunos perceberem a noção de variável, que para a maioria, é apenas vista como um número desconhecido.A autora parafraseando Mason (1996) afirma que a observação de padrões, sua descrição e generalização tem sido uma abordagem relevante na transição da aritmética para a álgebra.

Nesse contexto Vale (2012) defende que paralelamente ao desenvolvimento de conceitos matemáticos o trabalho com padrões permite preparar os alunos para aprendizagens posteriores, para além do desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, raciocínio lógico e comunicação.

Segundo Vale (2012) a utilização de tarefas que envolvam o estudo de padrões é um excelente meio para trabalhar a generalização, dando forma e significado aos símbolos algébricos, ensinando os alunos a resolver equações, a compreender funções, a modelar, e por fim compreender a álgebra no seu todo.

Na seção seguinte será feita uma abordagem sobre resolução de problemas através de padrões.

1.4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DE PADRÕES

De acordo com Vale (2012) resolver problemas através do processo de exploração e investigação obriga os alunos a formular questões, a elaborar e testar conjecturas e a fazer demonstrações. Desse modo a resolução de problemas favorece o envolvimento do aluno na sua própria aprendizagem e este aprende quando consegue mobilizar os seus recursos cognitivos e afetivos com a intenção de atingir um objetivo.

Para a autora a resolução de problemas proporciona a exploração de diferentes tópicos, permitindo realizar conexões em diferentes áreas da matemática. Além disso, para Vale (2012) procurar padrões é uma forte estratégia de resolução de problemas, pois para ela:

> “[...] A resolução de problemas não rotineiros e não tradicionais é um poderoso caminho que envolve os alunos na exploração e formação de padrões, levando-os a conjecturar, a verbalizar relações entre os vários elementos do padrão e a generalizar. Trabalhar a álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões é uma possível abordagem ao pensamento algébrico no ensino básico.” (Vale, 2012, p. 14)

Por fim, autora chama atenção para o fato de que para os alunos conseguirem resolver problemas, explorar padrões, fazer conjecturas, ou seja, desenvolver o pensamento algébrico; é necessário tempo, paciência, energia e muita perseverança por parte do professor.

No tópico seguinte será explanado sobre a importância em se trabalhar com padrões visuais além dos numéricos.

1.5 DOS PADRÕES VISUAIS AOS PADRÕES NUMÉRICOS

Há muito tempo já se falava sobre a relevância em se usar figuras para resolver problemas Vale (apud Polya, 2012), chama a atenção para a importância da intuição visual ao considerar como uma de suas estratégias de resolução de problemas fazer um desenho.

Porém, a autora completa que embora o papel do visual na resolução de problemas e na aprendizagem matemática geral seja reconhecido como importante além de ser objeto de estudo de muitos investigadores, essa ainda é uma questão em aberto.

Segundo Vale (2012) é muitas vezes mais fácil comunicar um conceito criando uma imagem visual, pois assim será compreendido mais rapidamente e retida por mais tempo do que uma sequência de palavras. Para a autora alguns estudantes pensam predominantemente de modo visual e para esses uma abordagem visual é apropriada, para outros é essencial que as suas competências visuais sejam desenvolvidas e para estes os padrões podem ser um bom contexto de aprendizagem.

De acordo com Vale (2012) a importância da visualização da matemática vem do fato de que a visualização não está relacionada somente com a mera ilustração, mas também por ser reconhecida como uma componente do raciocínio e da resolução de problemas. Para a autora, os estudantes sem esta capacidade visual terão grande dificuldade em ser capazes de ter sucesso na tarefa de aprender matemática.

Sendo assim, Vale (2012) afirma que toda a atividade matemática necessita de recorrer a representações. Uma representação deverá incluir componentes concretas, verbais, numéricas, gráficas, contextuais, pictóricas, contextuais ou simbólicas que descrevam diferentes aspectos do conceito.

Nesse contexto Vale (2012) considera que as tarefas com padrões dão aos estudantes oportunidades para verbalizar as suas próprias generalizações e traduzi-las numa linguagem mais formal de acordo com a sua idade.

Com relação à participação dos professores no trabalho com padrões, Vale (2012) afirma que se estes não tiverem nas suas práticas o hábito de propor aos alunos tarefas para experimentar as suas próprias generalizações, então não haverá lugar para o pensamento matemático, em particular, não há pensamento algébrico.

Dessa forma autora considera que a seleção das tarefas é crucial se o professor pretende criar experiências de resolução de problemas que permitam aos alunos fazer generalizações.

1.6 SURGIMENTO DA PROBLEMÁTICA

Diante das pesquisas realizadas, e do encontro com a orientadora da pesquisa, onde foi apresentado um problema de padrão para que eu e uma colega resolvêssemos, ao socializarmos as resoluções percebemos que utilizamos caminhos diferentes para chegar à generalização, daí surgiu o interesse em pesquisar sobre as estratégias utilizadas para resolução de problemas envolvendo padrões.

Tendo em vista a vontade de pesquisar sobre as estratégias de resolução de problemas envolvendo padrões, partimos à procura de trabalhos que já haviam sido escritos nessa mesma perspectiva, ao procurar no site da Capes encontramos uma única pesquisa relacionada a estratégias de resolução de problemas com padrões no Brasil, que foi feita por Trevisani (2012). Também foram feitas buscas no Google á procura de pesquisas que mostrassem a viabilidade para o desenvolvimento do trabalho almejado. Foi aí que encontramos um artigo de Pereira e Fernandes (2012) com uma análise de uma sequencia didática de problemas com padrões aplicada a alunos do sétimo ano do ensino fundamental II em Portugal.

Em sua pesquisa Trevisani (2012) busca compreender as estratégias que estudantes do sétimo ano do ensino fundamental utilizam para generalizar padrões com o uso de um software matemático. A pesquisa foi desenvolvida em uma cidade do interior de São Paulo, onde foram aplicadas seis atividades com um grupo de oito alunos, divididos em duplas e utilizando o computador.

Para analisar os dados Trevisani (2012) tomou como base cinco estratégias de generalização: tentativa e erro, contagem, termo unidade, diferença e explícita.

Ao finalizar a pesquisa Trevisani (2012), percebeu que as estratégias realizadas pelos alunos para generalizar os padrões visaram à busca pela expressão geral do padrão ao invés do trabalho com casos particulares, contribuindo para o desenvolvimento dos alunos participantes da pesquisa.

Pereira e Fernandes (2012) em seu trabalho tem a intenção de descrever e compreender as estratégias de generalização usadas por alunos de sétimo ano do ensino fundamental na exploração de problemas de padrão. Para obtenção dos dados os autores utilizaram a observação do trabalho dos alunos e das suas produções escritas em onze tarefas aplicadas em uma única turma.

Pereira e Fernandes (2012) concluem que há uma prevalência da estratégia explícita nas respostas dos educandos, por esta se adequar melhor a faixa etária dos alunos que era em média doze anos, além disso, segundo os autores essa estratégia permite determinar em imediato qualquer termo de uma sequencia.

Diante da revisão de literatura realizada, observamos que o ensino de álgebra através de resolução de problemas com padrão favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A pesquisa realizada por Pereira e Fernandes serviu de incentivo para a concretização do presente trabalho, pois através das conclusões feitas pelos autores em relação as estratégias utilizadas pelos alunos do sétimo ano em Portugal, surgiu a ideia de replicar o trabalho dos mesmos com a intenção de investigar as estratégias utilizadas por alunos do sétimo ano para resolver problemas envolvendo padrões matemáticos na cidade brasileira Catu/Ba .

Desse modo, considerando o exposto pelos autores, no que se refere ao uso de problemas envolvendo padrões para desenvolver o pensamento algébrico e o raciocínio do aluno, além de permitir o uso de variadas estratégias para resolução. A partir dessa ideia surgiu a questão dessa pesquisa.

Quais as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano da rede particular de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático?

A partir da revisão de literatura apresentada, tomamos conhecimento sobre o ensino de álgebra através da resolução de padrões e sobre a importância desta para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno.

Tendo em vista o questionamento acima se determinou o objetivo geral da pesquisa: Investigar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas que envolvem padrões. Para cumprir o objetivo geral, buscamos conhecer na tese de Barbosa (2009), os tipos de estratégias que podem ser utilizadas pelos alunos, ao resolver problemas envolvendo padrões.

No capítulo seguinte, apresentaremos o referencial teórico, pautado nos estudos que fizemos da pesquisa de Barbosa (2009), que junto com a revisão de literatura dará a sustentação necessária para a nossa análise posterior.

CAPÍTULO II: REFERENCIAL TÉORICO

Na seção inicial deste capítulo, serão apresentados os tipos de estratégias de generalização utilizadas na resolução de problemas com padrões fundamentado nas ideias de Barbosa (2009). Em seguida serão expostos alguns exemplos de atividade com padrão matemático a fim de melhor ilustrar algumas propostas de resolução estudadas por, Pereira e Fernandes (2012).

2.1. ESTRATÉGIAS DE GENERALIZAÇÕES E SUAS CARACTERIZAÇÕES

A revisão da literatura nos mostrou que o ensino de álgebra através da resolução de problemas com padrões proporciona ao aluno explorações ricas e diversificadas. As análises das dissertações e teses realizada por Baqueiro (2016), no período de 2003 a 2013, revelaram, entre outras coisas, que questões que levam à prática investigativa e exploratória, como as que envolvem observação e generalização de padrões, constituem um importante meio de conduzir o aluno ao desenvolvimento de processos cognitivos que o levem à descoberta de conceitos matemáticos. (p. 188). A autora afirma ainda que:

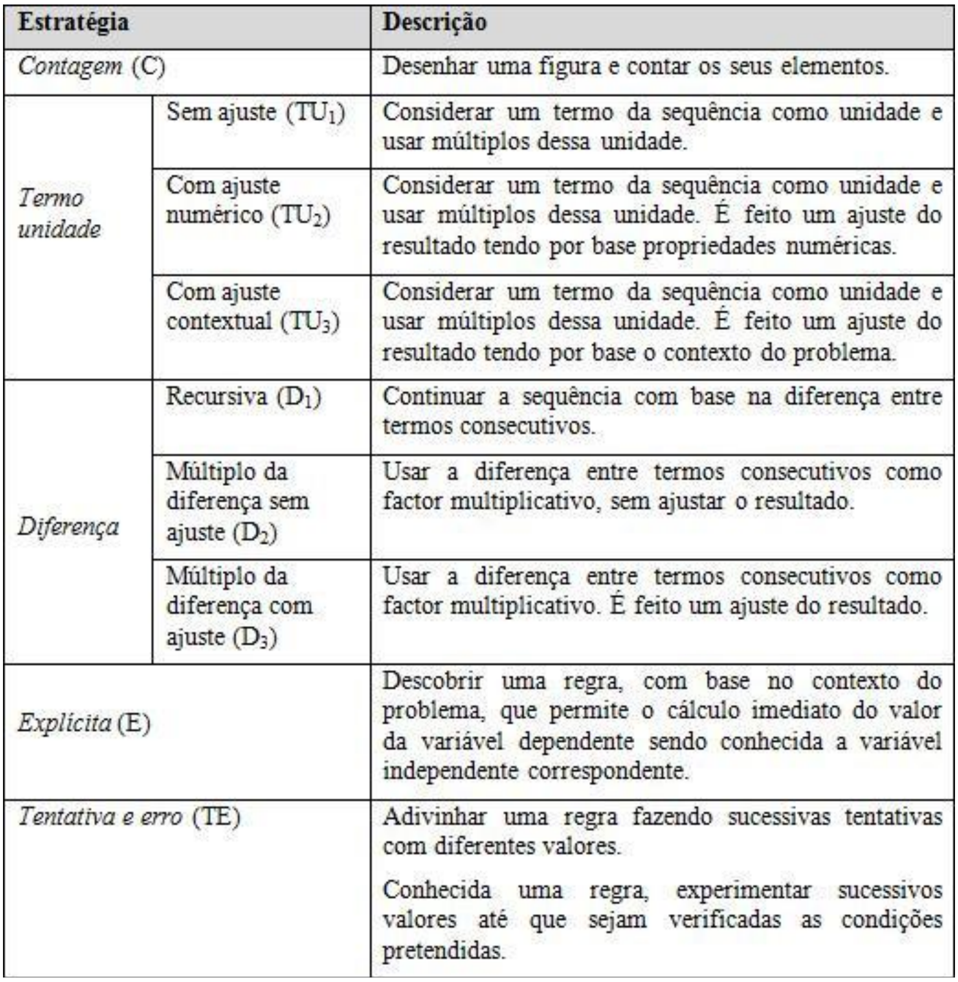
> [...] as atividades que envolvem generalização de padrões constituem um caminho para a introdução e desenvolvimento do pensamento algébrico. A percepção de padrões serve como instrumento para a utilização da letra e pode levar à generalização de uma noção matemática. É uma proposta de ensino interessante, pois pode ser utilizada na construção de expressões numéricas e/ou algébricas significativas. (BAQUEIRO, 2016, p. 188).

Segundo Barbosa (2009) é fundamental na resolução de problemas que os alunos apresentem um raciocínio flexível, sendo capazes de compreender e utilizar diferentes tipos de estratégias sejam estes visuais ou analíticas. Nesse contexto, a autora afirma que:

> [...] é fundamental analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, nomeadamente no que respeita à tipologia e à sua adequação à situação proposta, de modo a compreender a forma como pensaram. (Barbosa, 2009, p.74)

Barbosa (2009) em seu trabalho analisou as resoluções apresentadas por alunos do 6º ano e organizou-as em cinco categorias: *contagem*; *termo unidade*; *diferença*; *explícita* e *tentativa e erro*. A autora subdividiu ainda a estratégia termo unidade em: com *ajuste numérico* ou com *ajuste contextual*; a diferença em: *recursiva*, *múltiplo da diferença sem* *ajuste* e *múltiplo da diferença com ajuste*. Barbosa (2010) organizou as estratégias de generalização de acordo com as categorias supracitadas, conforme apresentado no quadro seguinte:

Quadro 1: Categorização das estratégias de generalização segundo Barbosa (2009)



Estratégia		**Descrição**
Contagem (C)		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.
Termo unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Diferença	Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Explícita (E)		Descobrir uma regra, com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
Tentativa e erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

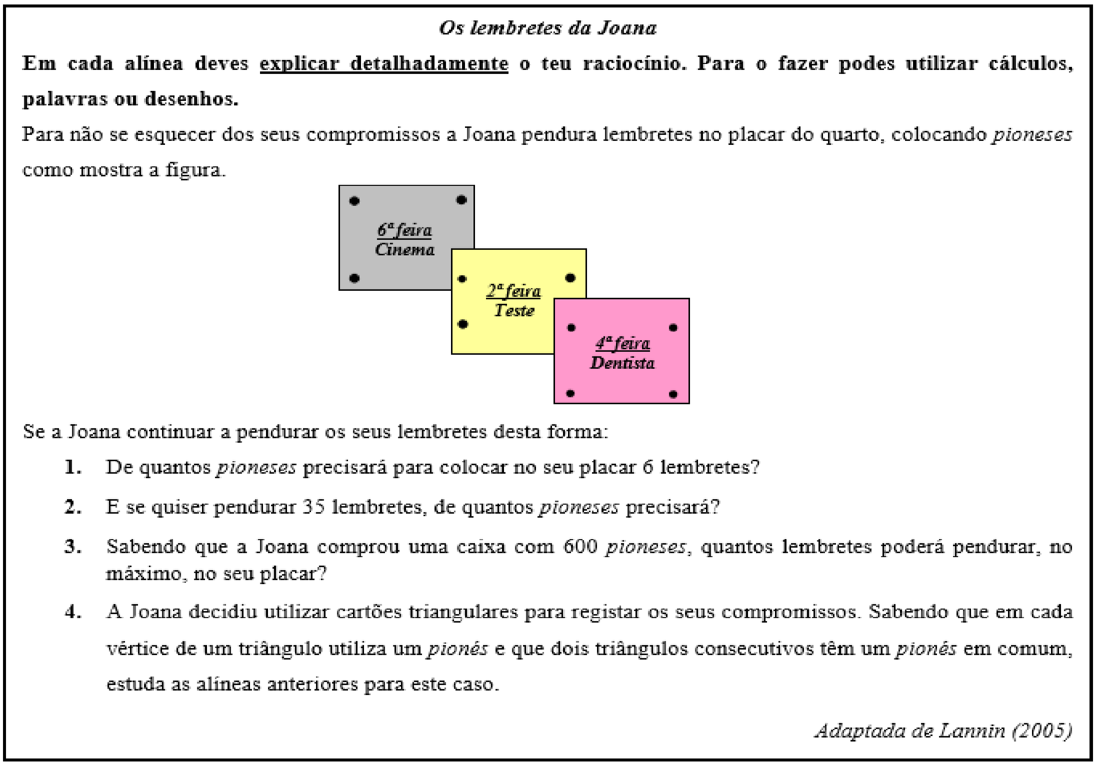
Fonte: Barbosa, 2010, p.4

A *contagem*, de acordo com Barbosa (2009) constitui-se em uma estratégia eficaz quando estamos perante uma generalização mais *próxima*, que Stacey (apud BARBOSA, 2009, p. 61) define como sendo aquela que é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência, desenhando ou a contando.

Com relação a estratégia da *diferença recursiva*, Barbosa (2009) afirma que a mesma não é eficaz para a *generalização distante*, que de acordo com Stacey (apud BARBOSA, 2009, p.61) é aquela que permite o cálculo de um dado termo da sequência, gerando a compreensão e descoberta de uma regra geral.

Na investigação feita por Barbosa (2009), a mesma observou que a estratégia *termo unidade com ajuste numérico* (TU_2), raramente se adequavam às questões propostas nas tarefas que apresentou para alunos do 6º ano, porque a estratégia do tipo TU_2 se caracterizam pelo recurso de, após serem utilizados múltiplos de termos da sequência, ter que envolver uma correção do resultado, baseada apenas em propriedades numéricas, enquanto nas suas tarefas, o ajuste precisava ser contextual.

Como exemplo do uso da estratégia TU_2 de forma inadequada, Barbosa (2009) traz a análise feita da questão 3 da atividade intitulada “os lembretes de Joana”, conforme mostra a figura seguinte:



Os lembretes da Joana

Em cada alínea deves explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para não se esquecer dos seus compromissos a Joana pendura lembretes no placar do quarto, colocando *pioneses* como mostra a figura.

Se a Joana continuar a pendurar os seus lembretes desta forma:

1. De quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?
2. E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?
3. Sabendo que a Joana comprou uma caixa com 600 *pioneses*, quantos lembretes poderá pendurar, no máximo, no seu placar?
4. A Joana decidiu utilizar cartões triangulares para registar os seus compromissos. Sabendo que em cada vértice de um triângulo utiliza um *pionés* e que dois triângulos consecutivos têm um *pionés* em comum, estuda as alíneas anteriores para este caso.

Adaptada de Lannin (2005)

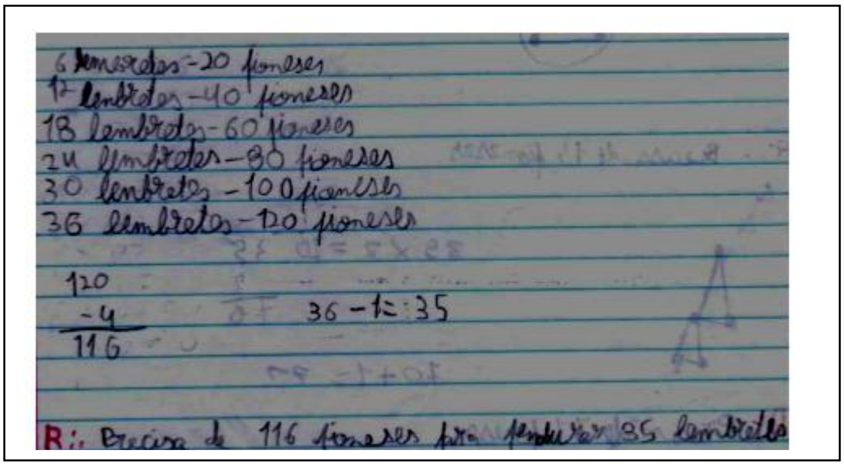
Figura 1: Os lembretes de Joana

Fonte: Barbosa, 2009, p. 126

Nessa atividade, as três primeiras questões pretendiam que os alunos identificassem e utilizassem a relação existente entre o número de lembretes retangulares e o número de pioneses[1] utilizados. Com relação à questão 3, uma das duplas investigadas, respondeu da seguinte maneira:

---

[1] Ana Cristina Coelho Barbosa é uma pesquisadora portuguesa que utiliza essa palavra, que não é comum para nós. Numa tradução livre, o termo *pioneses*, é utilizado no sentido de “percevejos”. Pequeno prego de cabeça grande e chata. (https://www.priberam.pt/dlpo/pioneses).



6 lembretes-20 pioneses
12 lembretes-40 pioneses
18 lembretes-60 pioneses
24 lembretes-80 pioneses
30 lembretes-100 pioneses
36 lembretes-120 pioneses

120
-4
116

36-1=35

R:. Precisa de 116 pioneses pra pendurar 35 lembretes

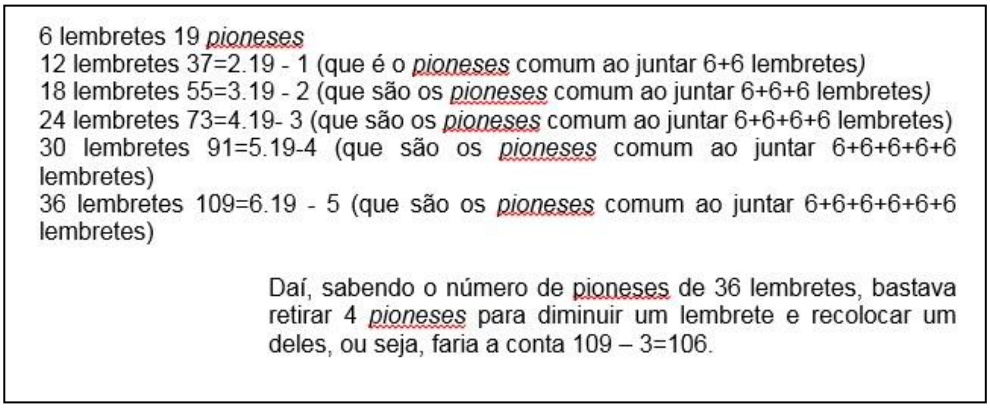
Figura 2: Resolução da dupla António e pelo Daniel da questão 2, Tarefa 1

Fonte: Barbosa, 2009, p. 238

Em sua analise a autora descreveu o seguinte:

> Tendo já determinado o sexto termo da sequência (questão 1), os alunos procuraram o múltiplo de seis mais próximo de trinca e cinco, utilizando um raciocínio proporcional. Após terem descoberto o número de *pioneses* necessário para pendurar trinta e seis lembretes, fizeram um ajuste para chegar ao valor pretendido. Esse ajuste não teve por base as condições do problema apresentado, centrou-se apenas na utilização de propriedades numéricas (BARBOSA 2009, p.238).

A análise feita por Barbosa (2009) revela que a dupla, ao utilizar a estratégia numérica, não conseguiram ter sucesso pois a componente visual do problema tem impacto na generalização. Com base no raciocínio da dupla, uma possível resposta seria:



6 lembretes 19 *pioneses*
12 lembretes 37=2.19 - 1 (que é o *pioneses* comum ao juntar 6+6 lembretes*)*
18 lembretes 55=3.19 - 2 (que são os *pioneses* comum ao juntar 6+6+6 lembretes*)*
24 lembretes 73=4.19- 3 (que são os *pioneses* comum ao juntar 6+6+6+6 lembretes)
30 lembretes 91=5.19-4 (que são os *pioneses* comum ao juntar 6+6+6+6+6 lembretes)
36 lembretes 109=6.19 - 5 (que são os *pioneses* comum ao juntar 6+6+6+6+6+6 lembretes)

> Daí, sabendo o número de pioneses de 36 lembretes, bastava retirar 4 *pioneses* para diminuir um lembrete e recolocar um deles, ou seja, faria a conta 109 – 3=106.

Figura 3: Exemplo da estratégia termo unidade com ajuste contextual

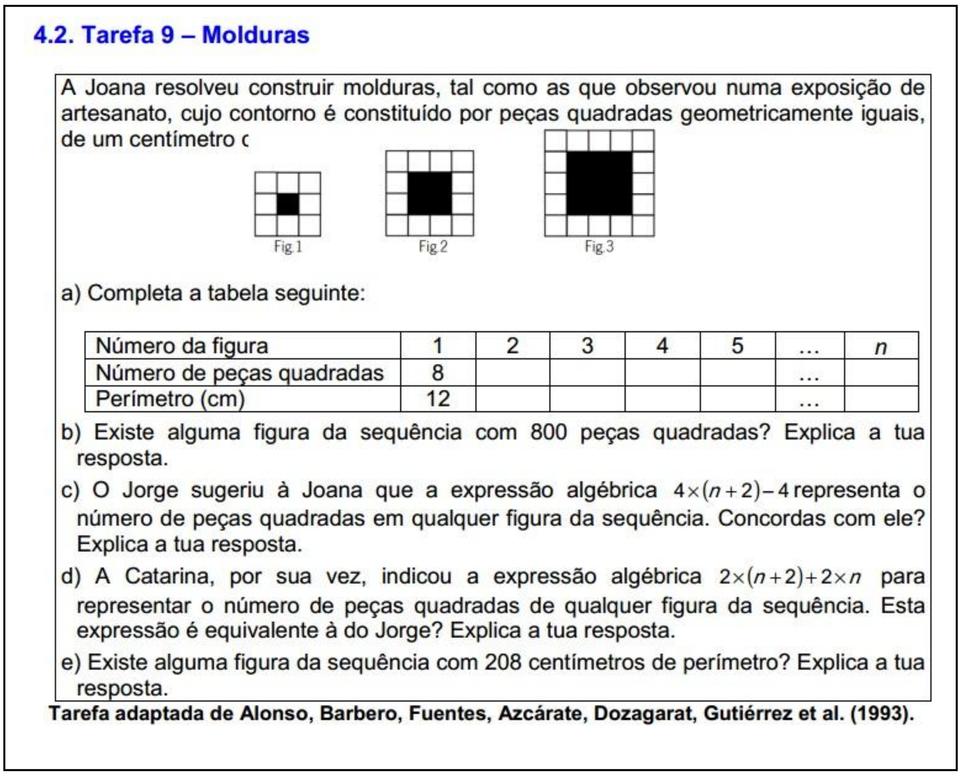
Fonte: Autoria própria. Adaptado da resolução da figura 3.

Na possível solução apresentada na figura 3, a estratégia utilizada é a termo unidade com ajuste contextual (TU3).

Com relação às estratégias que envolvem o ajuste contextual (TU3 e D3), Barbosa (2009) afirma que qualquer uma delas implica em um ajuste baseado no contexto do problema, o que nem sempre se afigura fácil para os alunos [...] (p. 194).

Na estratégia *explícita* de acordo com a autora, o aluno descobre uma regra com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente.

Na estratégia *tentativa e erro* o aluno adivinha uma regra fazendo diversas tentativas com diferentes valores, ou seja, conhecida uma regra, o aluno experimenta sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas. Para exemplificar, trazemos o resultado da análise da atividade “A moldura” proposto por Pereira e Fernandes (2012), conforme figura que segue.



4.2. Tarefa 9 – Molduras

A Joana resolveu construir molduras, tal como as que observou numa exposição de artesanato, cujo contorno é constituído por peças quadradas geometricamente iguais, de um centímetro c

a) Completa a tabela seguinte:

Número da figura	1	2	3	4	5	…	*n*
Número de peças quadradas	8					…	
Perímetro (cm)	12					…	

b) Existe alguma figura da sequência com 800 peças quadradas? Explica a tua resposta.

c) O Jorge sugeriu à Joana que a expressão algébrica $4\times(n+2)-4$ representa o número de peças quadradas em qualquer figura da sequência. Concordas com ele? Explica a tua resposta.

d) A Catarina, por sua vez, indicou a expressão algébrica $2\times(n+2)+2\times n$ para representar o número de peças quadradas de qualquer figura da sequência. Esta expressão é equivalente à do Jorge? Explica a tua resposta.

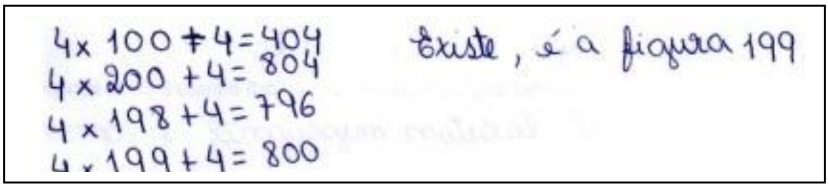
e) Existe alguma figura da sequência com 208 centímetros de perímetro? Explica a tua resposta.

Tarefa adaptada de Alonso, Barbero, Fuentes, Azcárate, Dozagarat, Gutiérrez et al. (1993).

Figura 4: Tarefa “Molduras”

Fonte: Pereira e Fernandes, 2012, p. 14.

Os autores referem que na questão (b), envolvendo uma *generalização distante*, o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *tentativa-e-erro*, experimentando sucessivos valores até verificar a condição pretendida (p. 15), conforme resolução apresentada na figura seguinte:



4x 100 + 4 = 404
4 x 200 + 4 = 804
4 x 198 + 4 = 796
4 x 199 + 4 = 800

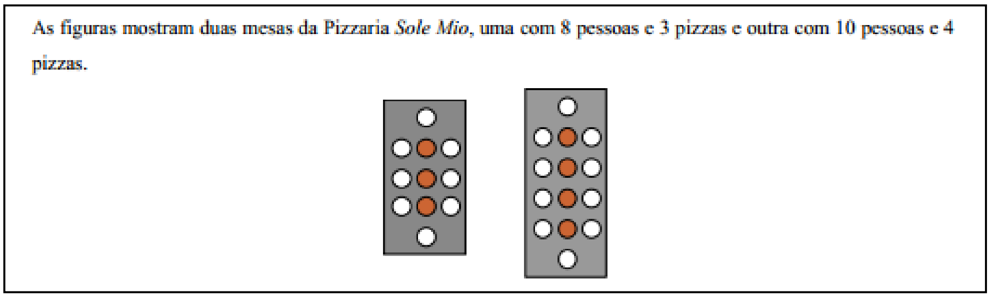
Existe, é a figura 199

Figura 5: Exemplo de estratégia envolvendo Tentativa e erro

Fonte: Pereira e Fernandes, 2012, p. 15.

Conforme vimos na resolução da figura 2, o contexto da sequência interferiu na resposta da dupla. Neste sentido, Barbosa (2009) divide os tipos de estratégias nos de natureza *visuais* e *não visuais*, dependendo se a *componente visual* do problema tem ou não impacto na generalização.

Por exemplo, na sequência que aparece na figura seguinte, a componente visual tem impacto direto na generalização, pois se quisermos juntar as mesas, é preciso estar atento às “pessoas” que estão na cabeceira.



As figuras mostram duas mesas da Pizzaria *Sole Mio*, uma com 8 pessoas e 3 pizzas e outra com 10 pessoas e 4 pizzas.

Figura 6: Exemplo de uma sequência que a componente visual tem impacto na generalização

Fonte: adaptado de Barbosa (2009), p. 139.

Assim sendo, Barbosa (2009) faz a seguinte classificação quanto à natureza das estratégias:

> - Visuais: as estratégias de contagem (C), termo unidade com ajuste visual (TU3), múltiplo da diferença com ajuste (D3) e explícita (E).
> - Não visuais: as estratégias termo unidade sem ajuste (TU1), termo unidade com ajuste numérico (TU2), recursiva (D1), múltiplo da diferença sem ajuste (D2) e tentativa e erro (TE). (BARBOSA, 2009, p. 371).

Deste modo, ao resolver questões envolvendo a sequência da figura 6, por exemplo, utilizando as estratégias contagem (C), termo unidade com ajuste visual (TU3), múltiplo da diferença com ajuste (D3) e explícita (E); o “olhar” na componente visual é muito importante, para se chegar a uma generalização correta.

Baqueiro (2016) refere que o processo de generalização de padrões é uma forma de conceber a álgebra que deve estar presente em todas as etapas da educação algébrica, principalmente na educação básica, constituindo-se em um dos elementos,

> [...] caracterizadores do pensamento algébrico que auxiliam na construção de objetos matemáticos (por exemplo, ‘função’), além de ser um dos importantes processos do pensamento matemático avançado que podem levar à abstração. (p. 188).

Para melhor entendermos as definições apresentadas por Barbosa (2009), pegamos uma tarefa contida no trabalho da mesma, com o objetivo de esclarecer melhor a ideia subjacente a cada uma delas. Na seção seguinte apresentaremos o resultado deste estudo.

2.2 EXEMPLO: TAREFA - A PIZZARIA SOLE MIO

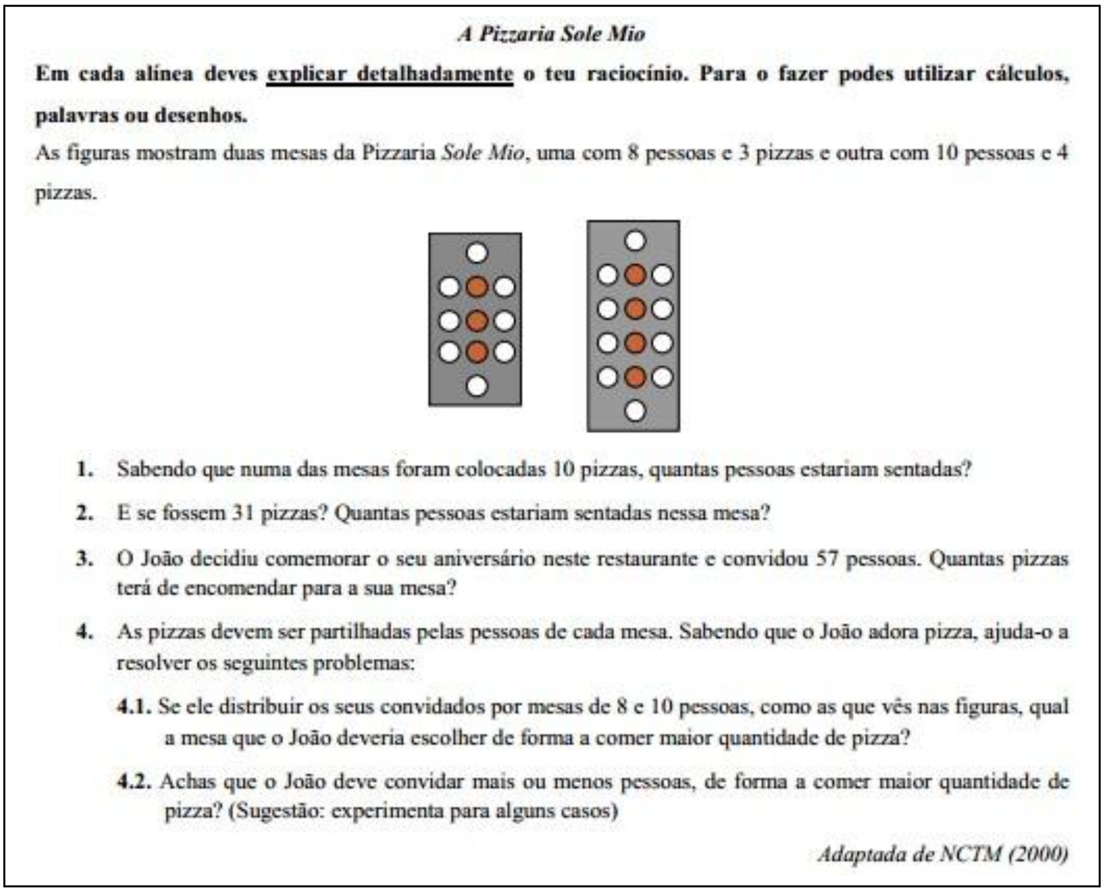
O exemplo a ser apresentado nesta seção, constitui-se segundo Barbosa (2009), como um problema contextualizado que envolve a exploração *linear crescente*. Além disso, o seu enunciado contém uma *componente visual explícita*, contemplando a representação de dois termos da sequência. A autora refere que as figuras são utilizadas com o intuito de contribuir para que os alunos sejam capazes de, facilmente, estabelecer relações entre as variáveis envolvidas.

Para que essa conexão se estabeleça, é preciso incentivar o “olhar” sobre as propriedades matemáticas, de modo que a relação existente entre a ordem de posição dos termos da sequência e seu valor correspondente constitua um caminho para se encontrar um padrão algebricamente útil. (BAQUEIRO, 2016, p.190), ou melhor desenvolver a *generalização algébrica*, que para Radford, implicam em:

> (1) a apreensão de uma regularidade; (2) a generalização dessa regularidade a todos os termos da sequência em questão; e (3) a formação de uma regra direta ou um esquema direto que permita determinar qualquer termo da sequência. No entanto, existe alguma dificuldade na ligação desses três aspetos centrais (RADFORD, 2008 apud, PEREIRA E FERNANDES, 2012).

Baqueiro (2016) observa que tais dificuldades acontecem principalmente quando as atividades são aplicadas aos alunos do ensino fundamental II, mas que mesmo com as dificuldades iniciais [...] ficou comprovado que em seu decorrer os alunos assumiram atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar conjecturas, tirar conclusões e justificar suas respostas. (p. 189). Que a experiência com as atividades os tornou mais reflexivos, fazendo-os criar e testar hipóteses.

De acordo com Barbosa (2009) o problema “A pizzaria Sole Mio”, envolve essencialmente a descoberta de relações entre o número de pizzas e o número de pessoas que se sentam em cada mesa, identificando assim situações de generalização *próxima* e de generalização *distante* e/ou *algébrica*. O quadro que segue mostra o enunciado do problema.



A Pizzaria Sole Mio

Em cada alínea deves explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

As figuras mostram duas mesas da Pizzaria *Sole Mio*, uma com 8 pessoas e 3 pizzas e outra com 10 pessoas e 4 pizzas.

1. Sabendo que numa das mesas foram colocadas 10 pizzas, quantas pessoas estariam sentadas?
2. E se fossem 31 pizzas? Quantas pessoas estariam sentadas nessa mesa?
3. O João decidiu comemorar o seu aniversário neste restaurante e convidou 57 pessoas. Quantas pizzas terá de encomendar para a sua mesa?
4. As pizzas devem ser partilhadas pelas pessoas de cada mesa. Sabendo que o João adora pizza, ajuda-o a resolver os seguintes problemas:
   - **4.1.** Se ele distribuir os seus convidados por mesas de 8 e 10 pessoas, como as que vês nas figuras, qual a mesa que o João deveria escolher de forma a comer maior quantidade de pizza?
   - **4.2.** Achas que o João deve convidar mais ou menos pessoas, de forma a comer maior quantidade de pizza? (Sugestão: experimenta para alguns casos)

Adaptada de NCTM (2000)

Figura 7: A Pizzaria Sole Mio

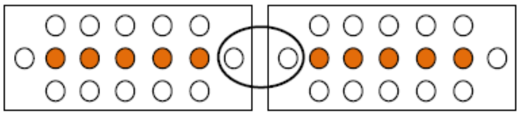
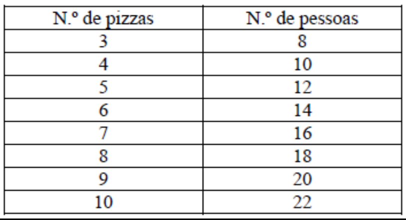
Fonte: Barbosa, 2009, p. 139.

Barbosa (2009), explica que a essa tarefa potencializa o desenvolvimento de uma grande diversidade de tópicos matemáticos: a utilização e comparação de números racionais, fracionários e decimais; divisão; expressões numéricas e os conceitos de dobro e simetria, mesmo não sendo de uma forma não tão evidente.

Tomando por base as questões de 1 a 3, pegamos a análise feita por Barbosa (2009), ao prever possíveis respostas dos alunos ao resolvê-las. Para a questão (1) as estratégias: *contagem*, *termo unidade com ajuste contextual*, *diferença recursiva* e *explícita*. Com a questão (2) exemplificamos a estratégia múltiplo da diferença com juste e a questão (3) serviu para ilustrar a tentativa e erro.

Barbosa (2009) refere que o padrão evidenciado na tarefa “A pizzaria Sole Mio” é do tipo *linear* e, assim sendo, a utilização de um raciocínio proporcional não é adequada, a não ser que se faça um ajuste no resultado. Tal fato inviabiliza a utilização da estratégia *termo unidade sem ajuste*, com *ajuste numérico* e *múltiplo da diferença sem ajuste*. O resultado desse estudo é mostrado nos quadros 2, 3 e 4 que seguem.

Quadro 2: Exemplificando as estratégias: contagem, termo unidade com ajuste contextual e diferença recursiva

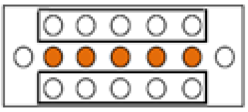
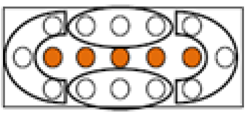
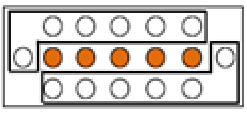
<table>
<tr><th>QUESTÃO</th><th>PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA</th><th>ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO</th></tr>
<tr><td rowspan="3">(1) sabendo que numa das mesas foram colocadas 10 pizzas, quantas pessoas estavam sentadas na mesa?</td><td>Neste caso, o objetivo é determinar o décimo termo da sequencia, pretendendo-se assim o estabelecimento de uma generalização próxima. Deste modo, basta desenhar uma mesa com 10 pizzas, colocando as pessoas numa disposição semelhante à dos exemplos fornecidos no enunciado, para posteriormente realizar a sua contagem.</td><td>Contagem: desenhar uma figura e contar seus elementos.</td></tr>
<tr><td>Nesta questão, apesar de 10 não ser múltiplo de nenhum dos termos apresentados, que foram o terceiro e o quarto, os alunos podem identificar o quinto termo da sequência e, a partir daí, duplicar o número de pessoas, encontrando assim o décimo termo da sequencia. Ao usar esta estratégia está se considerando duas mesas diferentes com 5 pizzas e 12 pessoas em cada mesa. Ao fazer a junção dessas duas mesas, mantendo a forma como as pessoas se sentam, devem ser eliminados 2 elementos, correspondentes às pessoas sentadas numa das pontas de cada mesa, como se pode observa
</td><td>Termo unidade com ajuste contextual:
Consiste em considerar o termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado com base no contexto do problema.</td></tr>
<tr><td>Podemos observar que, ao acrescentar uma pizza na mesa, são adicionadas duas pessoas, isso significa que a diferença entre termos consecutivos é 2 unidades. Diante desse fato podemos prolongar a sequencia até o décimo termo.

<table>
<tr><th>N.º de pizzas</th><th>N.º de pessoas</th></tr>
<tr><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>12</td></tr>
<tr><td>6</td><td>14</td></tr>
<tr><td>7</td><td>16</td></tr>
<tr><td>8</td><td>18</td></tr>
<tr><td>9</td><td>20</td></tr>
<tr><td>10</td><td>22</td></tr>
</table></td><td>Diferença recursiva:
Consiste em continuar a sequência com base na diferença entre dois termos consecutivos.</td></tr>
</table>

Fonte: adaptado de Barbosa (2009, p. 140e 141).

Com relação à estratégia explícita Barbosa (2009) explica que a análise do contexto do problema e das representações visuais, associadas a alguns termos da sequência, poderá conduzir à descoberta de uma regra que permita estabelecer uma relação imediata entre a *variável dependente* e a *variável independente*.

Dependendo da forma como os alunos *veem* a estrutura do padrão, como *interpretam* a disposição espacial das pessoas em torno das pizzas, a estratégia explícita pode ser aplicada de diversas maneiras, conforme são apresentadas no quadro seguinte, usando como exemplo uma mesa com 5 pizzas.

Quadro 3: Exemplificando a estratégia explícita com três modos diferentes de visualização da estrutura do padrão de uma mesa com 5 pizzas

QUESTÃO	PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO
(1) *sabendo que numa das mesas foram colocadas 10 pizzas, quantas pessoas estavam sentadas na mesa?*	 *2.10+2* Considerando que o número de pessoas que sentam nas partes laterais da mesa corresponde ao dobro do número de pizzas, tendo ainda que adicionar as pessoas sentadas nas pontas da mesa.	**Explícita:** descobre uma regra com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
	 *2.3+2.(10-2)* Já que são identificados dois conjuntos de 3 elementos nos extremos da mesa, sobrando ainda dois conjuntos, com menos 2 pessoas do que o número de pizzas, situados nas partes laterais da mesa.	
	 *(10+1)×2* Se as pessoas forem divididas em dois grupos com igual número de elementos, contemplando cada um as pessoas sentadas numa das laterais da mesa e uma das que se encontra na ponta da mesa.	

Fonte: Adaptado de Barbosa, 2009, p.142

Ainda com relação à questão (1), Barbosa (2009) afirma que pode ser usado um raciocínio multiplicativo, recorrendo a múltiplos da diferença entre termos consecutivos. Mas, tratando-se de um padrão linear, é necessário proceder a um ajuste do resultado obtido, aplicando assim a estratégia D_3, conforme explicado no quadro seguinte:

Quadro 4: Exemplificando a estratégias múltiplo da diferença com ajuste.

QUESTÃO	PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO
(2) *E se fossem 31 pizzas? Quantas pessoas estariam sentadas nessa mesa?*	Sabendo que 4 pizzas correspondem a 10 pessoas, para determinar o número de pessoas que estariam sentadas numa mesa com 31 pizzas, bastaria fazer *10+(31-4)×2=64* Este tipo de abordagem, em que se adiciona repetidamente grupos de 2 elementos, correspondentes às pessoas que se acrescentam ao colocar uma nova pizza na mesa.	**Diferença com ajuste:** Usa a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando o resultado.

Fonte: adaptado de Barbosa (2009, p. 142).

Referindo-se à terceira questão[2] e a estratégia da *tentativa e erro*, Barbosa (2009) afirma que é óbvio que neste tipo de tarefa

> a utilização desta estratégia é mais eficaz se previamente for identificada a forma como as pessoas se dispõem em volta das pizzas, dando assim lugar à execução de tentativas orientadas. No caso da questão *3*, os alunos poderão experimentar diversos valores para o número de pizzas até obterem as 58 pessoas, tendo sempre por base o cumprimento das condições determinadas. (BARBOSA, 2009, p. 143).

Barbosa (2009), que teve como objetivo de pesquisa, analisar "o modo como alunos do 6° ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem generalização de padrões em contextos visuais", constatou que tarefas centradas na exploração de padrões visuais conduziram os alunos à utilização de uma grande diversidade de estratégias de generalização e que:

> [...] apesar dessa diversidade, houve estratégias que os alunos aplicaram com maior frequência do que outras, normalmente <u>as de natureza visual</u>[3]. Em geral, os alunos compreenderam as potencialidades das diferentes estratégias exploradas e em que situações seriam úteis, no entanto, em alguns casos em que deveriam descobrir valores distantes numa sequência recorreram a generalizações aritméticas, usando estratégias aditivas. (BARBOSA, 2009, resumo).

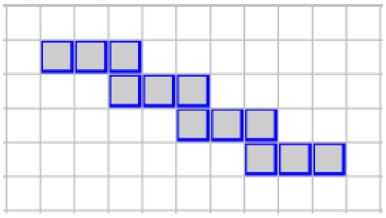
Trevisani (2012) em seu trabalho exemplifica a estratégia termo unidade sem ajuste e múltiplo da diferença sem ajuste com um único exemplo.

---

[2] O João decidiu comemorar o seu aniversário neste restaurante e convidou 57 pessoas. Quantas pizzas terá de encomendar para a sua mesa?

[3] Grifo nosso.

Quadro 5: Exemplificando as estratégias múltiplo da diferença sem ajuste e termo unidade sem ajuste.

QUESTÃO	PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO
Uma escada é construída da seguinte forma:  *Quantos quadrados são necessários para construir uma escada com 8 degraus? Justifique sua resposta***.**	*Basta multiplicar 8 (total de degraus da escada) por 3 (número de quadrados que aumenta ao se acrescentar um degrau na escada), obtendo como valor final o número 24.*	***Múltiplo da diferença sem ajuste-*** Utiliza-se um múltiplo da diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem realizar ajuste.
	O desenho fornecido inicialmente representa uma escada com 4 degraus, com um total de 12 quadrados. Então, para obter o número total de quadrados de uma escada com 8 degraus, basta dobrar o número de quadrados de uma escada com 4 degraus. Isso significa tomar como unidade o desenho dado na própria atividade e utilizar múltiplos do total de degraus. Dessa forma, se uma escada com 4 degraus tem 12 quadrados, e como 8 é o dobro de 4, então uma escada com 8 degraus terá o dobro de quadrados de uma escada com 4 degraus, ou seja, 24 quadrados. Como se pode perceber, não foi necessário ajustar o resultado no final.	***Termo unidade sem ajuste*** *– Utiliza um termo da sequencia como unidade e usa múltiplos dessa unidade.*

Fonte: adaptado de Trevisani (2012 p. 27)

De modo análogo, iremos investigar *Quais as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano da rede particular de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático?* A ideia é comparar os nossos resultados com os encontrados por Barbosa (2009).

Após entender a definição de cada uma das nove estratégias descritas por Barbosa (2009), fomos planejar os procedimentos da nossa investigação: escolhas metodológicas, elaboração da atividade a ser aplicada junto aos alunos do 7º ano e análise a priori das questões, identificando os tipos de estratégias envolvidas. No capítulo seguinte descreveremos cada uma destas etapas.

CAPÍTULO III: METODOLOGIA

Neste capítulo serão feitos relatos a respeito da abordagem e tipo da pesquisa realizada, bem como, a descrição dos caminhos percorridos para alcançar os objetivos propostos.

3.1. TIPO DA PESQUISA

A presente pesquisa tem a intenção de responder ao seguinte questionamento: *Quais as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano da rede particular de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrões matemáticos?* Para responder essa questão foi realizada uma pesquisa de modo que não houve preocupação com a representação numérica dos resultados, mas sim com o aprofundamento em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos do sétimo ano diante de problemas envolvendo padrões matemáticos.

Sendo assim a nossa pesquisa pode ser classificada como *qualitativa* em relação a sua abordagem, pois de acordo com Silveira e Córdova (2009),

> "Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens". (SILVEIRA e CÓRDOVA, 2009, p.31).

Segundo Gil (2008), em pesquisas desse tipo há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, o ambiente natural é a fonte direta para a coleta de dados e o pesquisador é o instrumento – chave. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem. (GIL, 2008, p.20).

Ainda segundo Silveira e Córdova (2009) uma pesquisa que visa gerar conhecimentos para aplicações prática é considerada de natureza *aplicada*, nesse caso, buscamos através dos nossos resultados, mostrar que o ensino de álgebra através de problemas envolvendo padrões contribui para um melhor desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

O presente trabalho tem como objetivo principal, investigar as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º ano, ao resolver problemas que envolvem padrões matemáticos, podendo assim ser caracterizada como *descritiva*, pois de acordo com Gil (2008, p.28), a mesma tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. No nosso caso, faremos a descrição das respostas dos alunos ao resolver a atividade envolvendo generalização relacionando-a ao tipo de estratégia desenvolvida.

No que diz respeito à coleta de dados, é caracterizada como uma *pesquisa de campo*, com intuito de colher dos alunos do sétimo ano as suas estratégias de resolução de problemas com padrão. De acordo com Gil (2008, p.55) a pesquisa de campo se caracteriza pela interrogação direta das pessoas cujo comportamento se deseja conhecer. Neste sentido, a investigação foi realizada pelo professor[4] dos alunos, em sala, em um dia normal de aula.

Para realização desta pesquisa, foi aplicada foi aplicado um questionário5, contendo um problema envolvendo padrão matemático. De acordo com Lakatos (2003 p. 201), “é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador”.

Para esta investigação optamos por aplicar o questionário/atividade com a presença do pesquisador, que também é o professor da turma, mas procurando não interferir, ou seja, não dar pistas que venham a influenciar na escolha da estratégia por parte do aluno.

Na próxima seção discorreremos sobre o contexto da pesquisa.

3.2. DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Como foi relatado no capítulo 1, por motivos pessoais, essa pesquisa não pôde ser iniciada no tempo proposto pela coordenação do curso. Somente após um ano e meio, com os empecilhos pessoais já resolvidos, é que foi dado início a este trabalho monográfico. A partir daí, foram apenas quarenta e cinco dias aproximadamente para conclusão.

Visando o pouquíssimo tempo que tínhamos e sem deixar de lado as inquietações pessoais em relação ao ensino de álgebra, optamos em estudar sobre as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo padrão.

Ainda na intenção de otimizar o tempo que tínhamos, resolvemos realizar a pesquisa no local de trabalho da autora da pesquisa, evitando assim, imprevistos com outras escolas e outros professores. A escola escolhida é da cidade de Catu-Ba, que faz parte de uma rede privada, a qual terá a sua identidade mantida em sigilo.

---

[4] Que neste caso também é o pesquisador.

[5] A partir daqui, iremos nos referir ao questionário como a “Atividade”.

A turma escolhida foi uma das quatro turmas de sétimo ano do turno matutino nas quais a pesquisadora é a professora regente. O critério utilizado para a escolha da turma, dentre outras, foi o do comportamento e bom rendimento dos alunos durante as aulas.

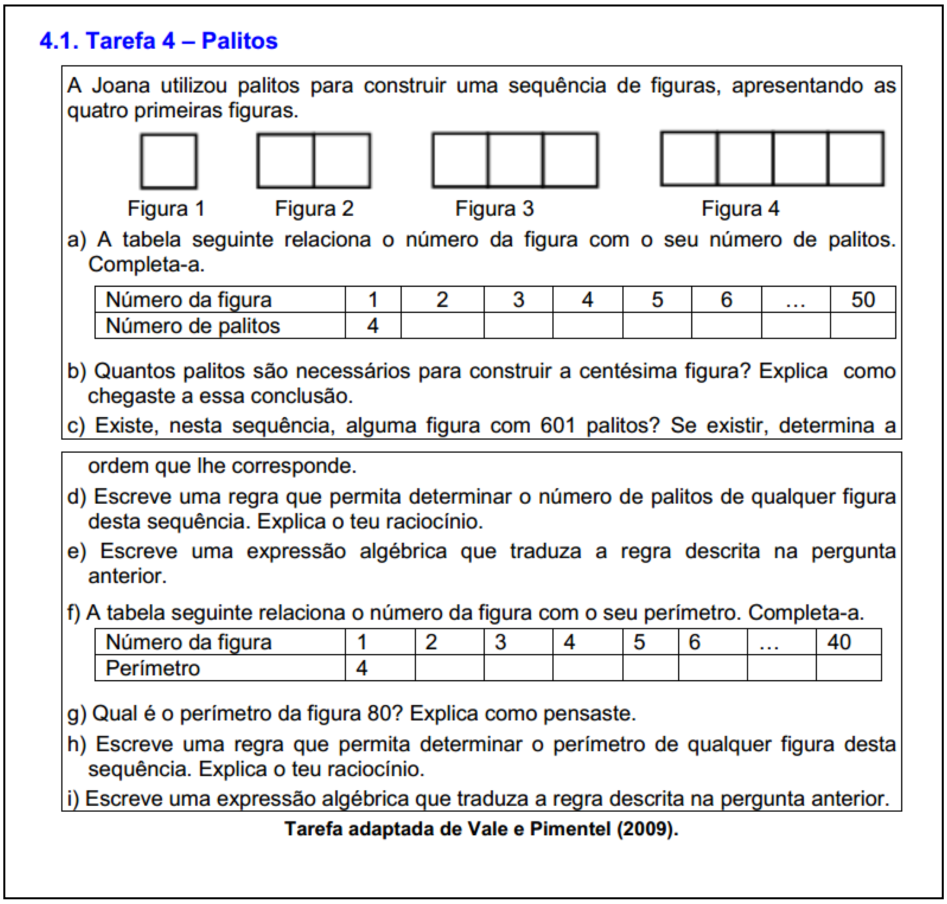
A turma é composta por 30 alunos, porém apenas 26 deles se disponibilizaram a participar da pesquisa, já que a professora/pesquisadora sugeriu que a participação não era obrigatória e nem seria avaliativa.

Foi escolhido o sétimo ano como a série a ser desenvolvida a pesquisa primeiro, por ser o único segmento em que a autora trabalha na unidade, e depois, por já ter iniciado os conteúdos algébricos nessa turma, pouco tempo antes de aplicar a pesquisa.

Para alcançar os objetivos propostos, aplicamos uma *Atividade* que será detalhada na seção seguinte.

3.3 SOBRE A ATIVIDADE

O nosso instrumento de pesquisa foi uma A*tividade* contendo uma situação problema envolvendo generalização de padrão. Para a aplicação da atividade foi feita uma adaptação de uma sequência presente no artigo de Pereira e Fernandes (2012, p.9), conforme figura seguinte:



4.1. Tarefa 4 – Palitos

A Joana utilizou palitos para construir uma sequência de figuras, apresentando as quatro primeiras figuras.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	…	50
Número de palitos	4							

b) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

c) Existe, nesta sequência, alguma figura com 601 palitos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

d) Escreve uma regra que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

e) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

f) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	…	40
Perímetro	4							

g) Qual é o perímetro da figura 80? Explica como pensaste.

h) Escreve uma regra que permita determinar o perímetro de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

i) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

Tarefa adaptada de Vale e Pimentel (2009).

Figura 8: Tarefa que serviu de modelo para a elaboração do nosso questionário

Fonte: Pereira e Fernandes (2012, págs. 9-10)

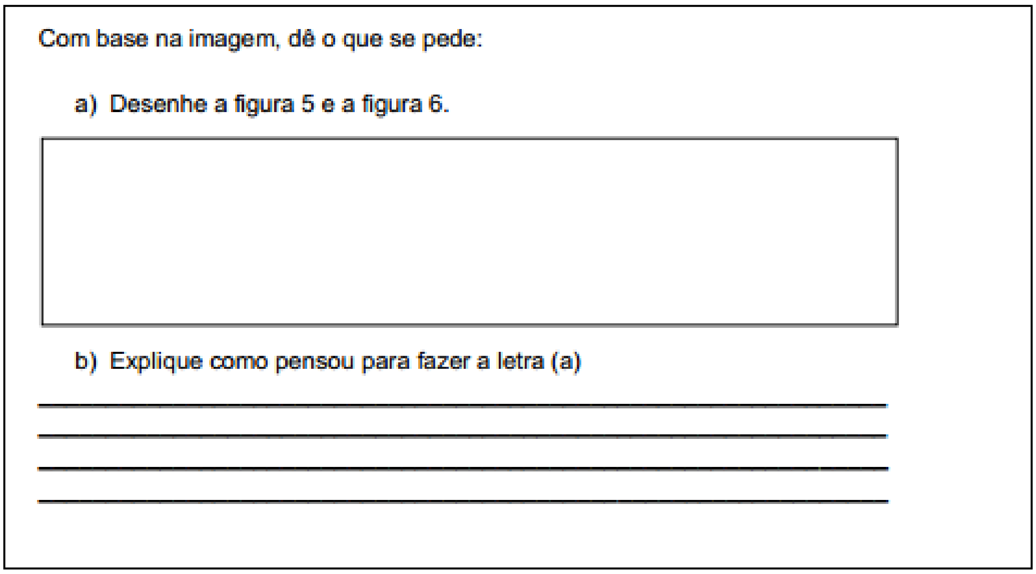
Elaboramos o questionário com oito itens. Nos sete primeiros os alunos respondem questões envolvendo a observação e generalização de padrão e, na última, expressam sua opinião sobre a atividade.

Começamos por adaptar a sequência apresentada por Pereira e Fernandes (2012). Como os itens se referem a palitos, pegamos palitos de fósforos reais e construímos uma sequência. Em seguida, tiramos a foto e colocamos no questionário, conforme mostra a figura seguinte:

Figura 9: Sequência presente no questionário construída com palitos de fósforos

Fonte: autoria própria

A segunda adaptação foi que colocamos duas questões iniciais relacionadas à construção da sequência. Como seria o primeiro contato dos alunos com esse tipo de atividade, queríamos que os mesmos visualizassem a figura e descobrissem um padrão que os permitissem continuar a sequência.



Com base na imagem, dê o que se pede:

a) Desenhe a figura 5 e a figura 6.

b) Explique como pensou para fazer a letra (a)

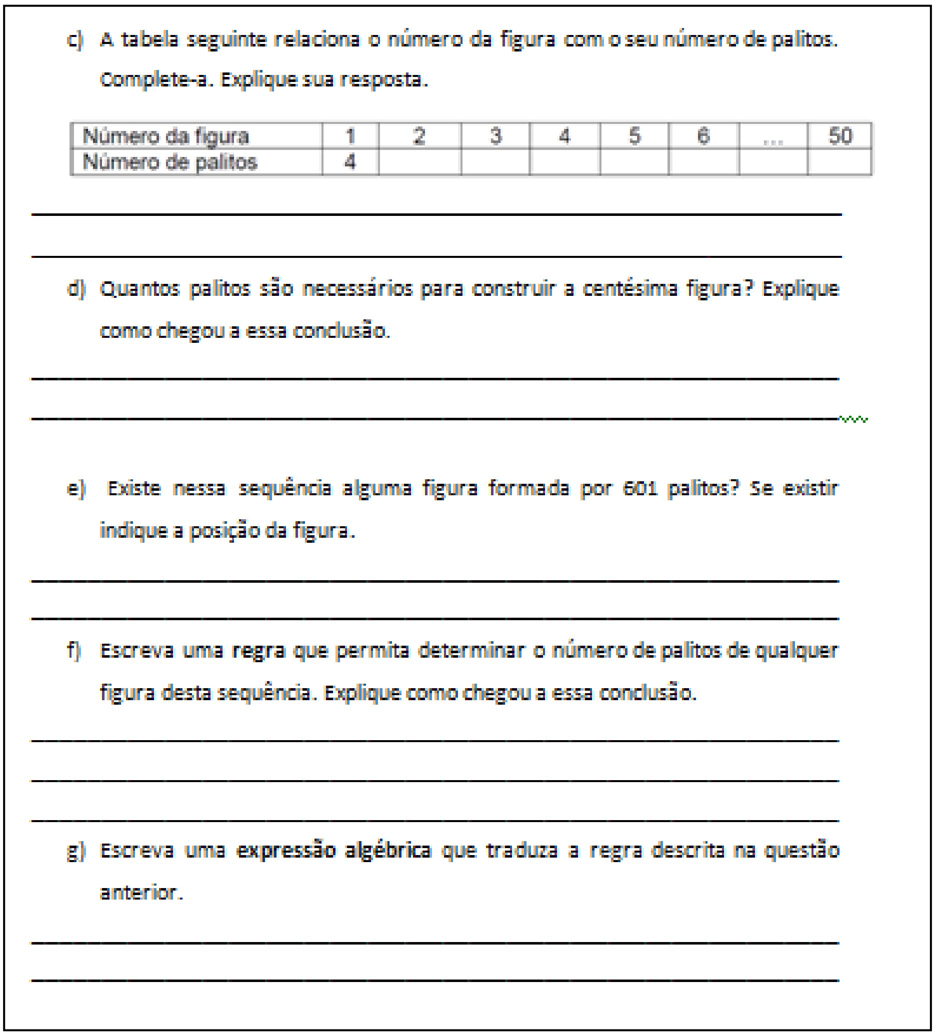
Figura 10: Questões (a) e (b) do questionário

Fonte: autoria própria.

A questão (a) leva naturalmente ao aluno responder usando a estratégia da Contagem, pois irá fazer o desenho das figuras 5 e 6. Já na letra (b), a intenção é que exprimam, em linguagem natural, como foi que perceberam o padrão. Nesse item, nossa conjectura é de que a maioria utilize a estratégia da Diferença recursiva, ou seja, escrevam que para construir a figura 5 e 6, eles usaram a figura anterior e acrescentaram mais um quadrinho.

Dos itens (c) ao (g) os questionamentos são no sentido de que o aluno perceba a relação de dependência entre as variáveis envolvidas na atividade: número da figura e a quantidade de palitos. O objetivo é que visualizem um padrão que os leve à generalização distante e/ou algébrica. Para que isso aconteça, o aluno precisa abandonar as estratégias, de contagem e recursiva, caso as tenham utilizado nos itens (a) e (b).

Vale ressaltar que utilizamos apenas a tabela da letra (a) da tarefa de Pereira e Fernandes (2012) (figura 8). A figura seguinte apresenta as questões do (c) ao (g).



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Complete-a. Explique sua resposta.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4							

d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se existir indique a posição da figura.

f) Escreva uma **regra** que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão.

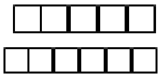
g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior.

Figura 11: Questões (c) a (g) do questionário

Fonte: autoria própria.

O próximo passo dado, antes de aplicar a atividade e de analisar as respostas dos alunos, foi o de responder as questões, prevendo algumas possíveis respostas, associando a cada um dos tipos de estratégias propostos por Barbosa (2009). Elaboramos quadros no qual colocamos o resultado desse estudo. Através da sequência acima serão analisadas

Quadro 6: Possíveis soluções para as questões (a), (b) e (c) da nossa *Atividade*.

<table>
<tr><th>ITEM DA QUESTÃO</th><th>PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA</th><th>ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO</th></tr>
<tr><td>(a) Como ficaria o desenho da figura 5? E da figura 6?</td><td></td><td>**Contagem**: utiliza-se representação visual ou a contagem dos elementos solicitados.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(b) Explique como pensou para fazer a letra (a)</td><td>*Repeti a figura anterior e acrescentei mais três palitos.*</td><td>**Diferença recursiva:** continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.</td></tr>
<tr><td>*Percebi que na figura 1 a base tem 1 palito, na figura 2 a base tem 2 palitos, na figura 3 a base tem 3 palitos e na figura 4 a base tem 4 palitos. Daí desenhei a figura 5 com 5 palitos na base e a figura 6 com 6 palitos na base.*</td><td>**Termo unidade sem ajuste**- considera um termo da sequencia como unidade e usa múltiplos dessa sequencia.</td></tr>
<tr><td>*Percebi que na sequencia é acrescida sempre um quadrado, ou seja: 1ª figura- 1 quadrado, 2ª figura- 2 quadrados,e assim por diante.*</td><td>**Diferença recursiva:** continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Complete-a. Explique sua resposta.</td><td rowspan="2"><table><tr><td>*Nº da Fig.*</td><td>*1*</td><td>*2*</td><td>*3*</td><td>*4*</td><td>*5*</td><td>*6*</td><td>*...*</td><td>*50*</td></tr><tr><td>*Nº de palitos*</td><td>*4*</td><td>*7*</td><td>*10*</td><td>*13*</td><td>*16*</td><td>*19*</td><td></td><td>*151*</td></tr></table></td><td>**Contagem**: utiliza-se representação visual ou a contagem dos elementos solicitados.</td></tr>
<tr><td>**Diferença recursiva:** continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.</td></tr>
<tr><td>*Observando que em cada figura aumentam 3 palitos em relação a figura anterior. Percebi que da figura 5 para a figura 10 aumentam 15 palitos, da figura 10 para a figura 20 aumentam 30 palitos. Então a vigésima quinta figura possui 76 palitos. Daí conclui que a quinquagésima figura possui 151 palitos, ou seja, ao dobrar a posição da figura dobramos também a quantidade de palitos e subtraímos 1 do resultado.*</td><td>**Diferença- Múltiplo da diferença com ajuste:**
Usa a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste no resultado.</td></tr>
</table>

Fonte: autoria própria

Como é o primeiro contato dos mesmos com esse tipo de atividade, o mais provável é que utilizem a estratégia da contagem ou a diferença recursiva (D_1) para chegar ao número de palitos do perímetro. O que não invalida a hipótese de observarem a relação existente entre o número da figura e a quantidade de palitos, desenvolvendo dessa forma a estratégia explícita (E).

Como a sequência escolhida para a atividade é de *natureza visual*, as estratégias TU_3 e D_3, vai implicar em um ajuste baseado no contexto do problema. Vale ressaltar que no item (e) pretendemos promover a *reversibilidade* do pensamento do aluno, procurando-se estabelecer a relação inversa da que tinha sido considerada nos itens anteriores, ou seja, dado o número de palitos de fósforos determinar o número da figura.

No quadro seguinte, apresentamos possíveis soluções para as questões (d) e (e), envolvendo tais estratégias:

Quadro 7: Possíveis soluções para as questões (d), (e) da nossa *Atividade*.

ITEM DA QUESTÃO	PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO
(d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.	*De acordo com o item (c), percebi que da figura 50 para a figura 100 deveria aumentar 151 palitos, ou seja, dois vezes 151 menos um, logo a centésima figura possui 301 palitos.*	**Diferença- Múltiplo da diferença com ajuste:** Usa a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste no resultado.
	Percebi que em cada figura são acrescentados 3 palitos à figura anterior. Desse modo serão acrescentados 3 palitos a quantidade de vezes da posição da figura e acrescentamos o número 1 ao resultado.	**Termo unidade: Com ajuste numérico:** Considera um termo da sequência como unidade e usa múltiplos dessa unidade. È feito um ajuste no resultado tendo por base propriedades numéricas.
(e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se existir indique a posição da figura.	*Sabendo que a posição da figura multiplicada por 3 e acrescentando um ao resultado final encontramos a quantidade de palitos da posição referida. Fazendo o caminho inverso podemos subtrair uma unidade da quantidade de palitos e o resultado dividir por 3 (que é a quantidade de palitos que aumenta em cada figura), encontramos assim a posição da figura.*	**Diferença- Múltiplo da diferença com ajuste**: Usa a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste no resultado.

Fonte: autoria própria

Barbosa (2009) assegura que as estratégias termo unidade com ajuste e múltiplo da diferença com ajuste, nem sempre é fácil para os alunos. Nossa conjectura é que dificilmente os alunos desenvolverão esse tipo de estratégia ou, se o fizerem, não levarão em consideração o ajuste contextual, obtendo assim, uma resposta incorreta.

No quadro seguinte, apresentamos possíveis soluções para as questões (f) e (g), envolvendo tais estratégias:

Quadro 8: Possíveis soluções para as questões (f) e (g) da nossa *Atividade*.

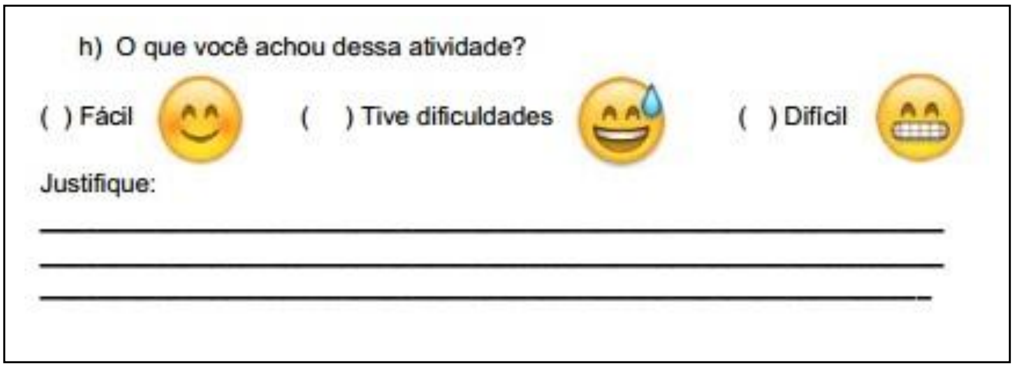
ITEM DA QUESTÃO	PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO
(f) Escreva uma regra que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão.	*A posição da figura multiplicada por 3 (quantidade de palitos que é acrescida em cada figura) adicionada a uma unidade.*	**Diferença- Múltiplo da diferença com ajuste**: Usa a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste no resultado.
(g) Escreva uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na questão anterior.	*n .4 – (n-1)*	**Explícita:** descobre uma regra com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
	n.3 + 1	**Explícita:** descobre uma regra com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.

Fonte: autoria própria

A letra (f) pede para que escrevam uma regra que permita calcular o perímetro de qualquer figura. Para este item estamos prevendo que os alunos, mesmo que tenham percebido a regra, tenham dificuldades para expressá-la em linguagem natural, pois os mesmos não estão acostumados.

No item (g), pedimos para que escrevam uma expressão algébrica. Pelo fato dos alunos estarem familiarizados com a simbologia algébrica, principalmente no que diz respeito ao uso das “letras”, esperamos que consigam escrever um modelo.

O item (h) da atividade teve como objetivo verificar a opinião dos alunos com relação a atividade, conforme mostra a figura seguinte:



h) O que você achou dessa atividade?

( ) Fácil 😊 ( ) Tive dificuldades 😅 ( ) Difícil 😬

Justifique:

____

____

____

Figura 12: Item (h) do questionário

Fonte: autoria própria

Para o item (h), nossa expectativa é que as respostas variem entre "tive dificuldades" e "difícil", por ser o primeiro contato com a atividade, por não ter a interferência direta da professora/pesquisadora na hora da resolução e pela natureza visual da sequência.

Na sessão seguinte descreveremos como se deu a aplicação da atividade.

3.2. SOBRE A COLETA DE DADOS

No dia 23 de agosto de 2017 os alunos levaram uma autorização para os responsáveis assinarem permitindo a participação dos mesmos na atividade. No dia seguinte, os alunos devolveram a mesma devidamente assinada.

A pesquisa foi realizada no dia 25 de agosto do mesmo ano, em uma escola da rede privada, com uma turma composta por trinta alunos com idades média de doze anos, vale salientar que só vinte e seis alunos responderam a atividade. Para a resolução, os alunos foram solicitados a sentarem em duplas, de modo que estas fossem formadas por eles próprios. Foi salientado para os alunos que suas identidades seriam mantidas em sigilo. A opção do trabalho em duplas justificou-se pela falta de tempo que tínhamos para concluir a pesquisa. Durante a análise de dados as duplas serão identificadas por D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9, D10, D11, D12 e D13. A atividade teve duração de 100 minutos. Em seguida, foram distribuídas as atividades.

A intenção da pesquisadora era gravar os diálogos de cada dupla utilizando os celulares das mesmas, mas pelo fato da pesquisa se dá em uma escola privada onde os alunos são proibidos de celular, não foi possível realizar nenhum tipo de gravação.

À medida que as duplas iam concluindo as atividades, as mesmas foram sendo recolhidas.

3.4. TÉCNICA PARA ANÁLISE DOS DADOS

De acordo com Gil (2008, p. 156),

> A análise tem como objetivo organizar e sumariar os dados de forma tal que possibilitem o fornecimento de respostas ao problema proposto para investigação. Já a interpretação tem como objetivo a procura do sentindo mais amplo das respostas, o que é feito mediante sua ligação a outros conhecimentos anteriormente obtidos.

As respostas serão analisadas por questão, ou seja, avaliar todas as respostas do item (a), depois todas do item (b) e assim sucessivamente. NEGRÃO (2006) chama este procedimento de análise horizontal.

De acordo com Gil (2008, p. 157) “para que essas respostas possam ser adequadamente analisadas, torna-se necessário, organizá-las, o que é feito mediante o seu agrupamento em certo número de categorias”. Assim sendo, iremos procurar por respostas “que sejam comuns” e daí criar tais categorias.

A técnica utilizada para análise será a de emparelhamento ou associação, que para Fiorentini et al (2005) “consiste em analisar as informações a partir de um modelo teórico prévio”. Afirmam ainda que:

> Isso pode ser feito por intermédio de um emparelhamento ou associação entre o quadro teórico e o material empírico, verificando se há correspondência entre eles. O sucesso da análise dependerá da qualidade e da versatilidade do quadro e da grade de análise. (FIORENTINI E LORENZATO, 2009, p. 138 e 139).

Assim sendo, iremos fazer o emparelhamento entre as estratégias de generalização, segundo Barbosa (2010) e que são apresentados no quadro 1, com as respostas das duplas que constam no protocolo.

Para tal, elaboramos um quadro, cujo objetivo é preencher durante a análise e apresentar posteriormente, dando uma ideia mais sintetizada das estratégias utilizadas pelas duplas. Segue o modelo do quadro.

Quadro 9: Estratégias de Generalização, segundo Barbosa (2009), que podem ser mobilizados pelas duplas, em cada item do questionário.

QUESTÕES	DUPLAS													
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14
a														
b														
c														
d														
e														
f														
g														

C: contagem; TU1: termo unidade sem ajuste; TU2: termo unidade com ajuste numérico; TU3: termo unidade com ajuste contextual; D1: diferença recursiva; D2: múltiplo da diferença sem ajuste; D3: múltiplo da diferença com ajuste; E: explícita e TE: tentativa e erro.

Fonte: autoria própria

Voltando a nossa questão de pesquisa que é: *Quais as estratégias de generalização utilizadas por alunos do sétimo para resolver problemas envolvendo padrão matemático?*

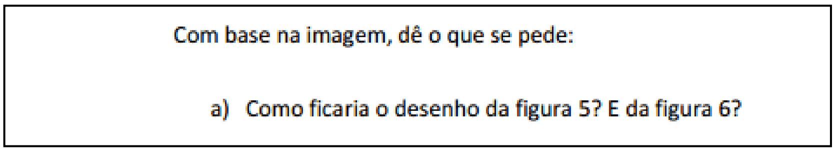
Por meio do quadro acima podemos perceber com clareza as estratégias mais utilizadas por cada dupla em todos os itens da atividade. A estratégia mais utilizada foi a *explícita*, seguida da *contagem* e da *diferença recursiva*. Além disso, podemos notar o avanço de algumas duplas no decorrer da atividade, como exemplo a dupla D13 que iniciou com a estratégia *contagem,* usou a *diferença recursiva, mas,* ao final conseguiu escrever uma regra imediata para determinar a quantidade de palitos de uma figura qualquer aplicando a estratégia *explícita*. As duplas D7, D8, D11 e D12 também tiveram desenvolvimentos análogos à dupla D13. As duplas D5 e D6, notamos que essas tiveram maior facilidade em desenvolver uma regra para a resolução, como vimos, essas duplas usaram a estratégia *explícita* desde o item (b) da atividade. Em contrapartida percebemos que as duplas D2 e D3 começaram com a estratégia *contagem* nos itens (a) e (b) e ao final da atividade ainda utilizavam a estratégia *recursiva*. O último fato servirá de incentivo para a professora/pesquisadora continuar a trabalhar com os problemas envolvendo padrões matemáticos. De modo que esses problemas sejam ferramentas para ensinar diversos conteúdos matemáticos, visando tornar os alunos capazes de realizar generalizações distantes e ou algébricas.

No capítulo seguinte descreveremos o resultado da análise dos protocolos.

CAPÍTULO IV: ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo serão apresentadas as análises dos dados obtidos através da aplicação do nosso instrumento de pesquisa, que foi uma *Atividade* envolvendo observação e generalização de padrões matemáticos, aplicados a alunos do 7º ano, que foram organizados em duplas. Como forma de identificar cada uma das duplas, pegamos aleatoriamente, as atividades respondidas e nomeamos de: D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9, D10, D11, D12 e D13. A análise foi realizada por questão. No final, apresentaremos o quadro oriundo da técnica do *emparelhamento*, respondendo assim, a nossa questão de pesquisa.

4.1 Análise do item (a)



Com base na imagem, dê o que se pede:

a) Como ficaria o desenho da figura 5? E da figura 6?

Com este questionamento buscávamos identificar se os alunos conseguiam perceber alguma regularidade na construção da sequência da figura dada. Após examinar as respostas das duplas, dividimos em dois grupos:

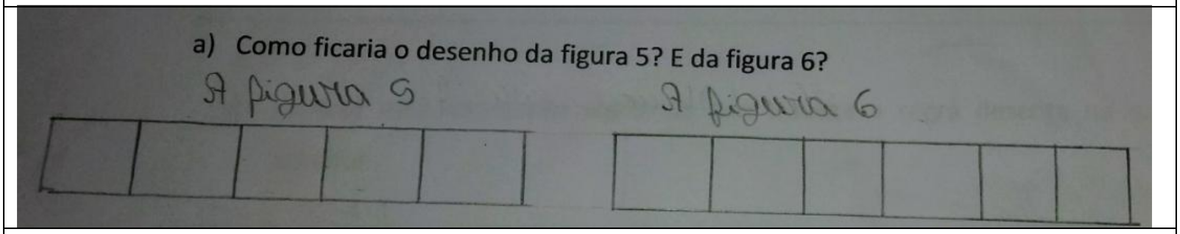
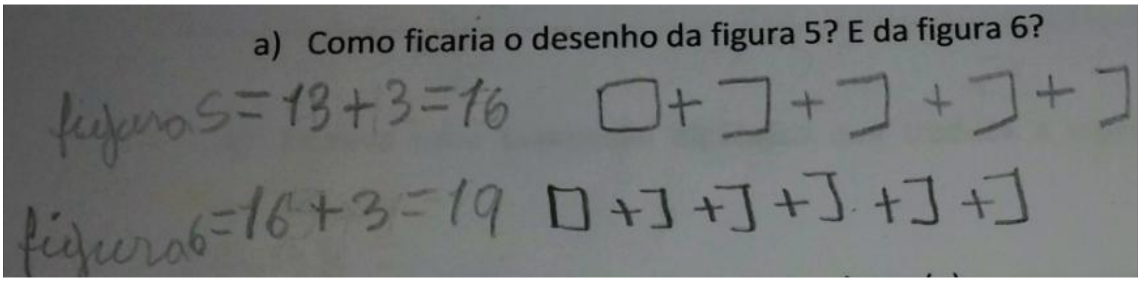
GRUPO 1: aqueles que responderam seguindo o modelo dado;

GRUPO 2: aqueles que não responderam conforme o modelo dado.

No primeiro grupo estão doze duplas, que continuaram desenhando a sequência de acordo com o exemplo, dando ênfase a representação visual, utilizando assim, o que já era previsto, a estratégia da *contagem.* Apenas a dupla identificada como D4, não responderam seguindo o modelo. Eles conseguiam perceber uma regularidade na construção da sequência da figura dada e desenharam o padrão percebido, dando indícios de que já estão próximos da estratégia *explícita* desejada para o item (c), que pede a quantidade de palitos.

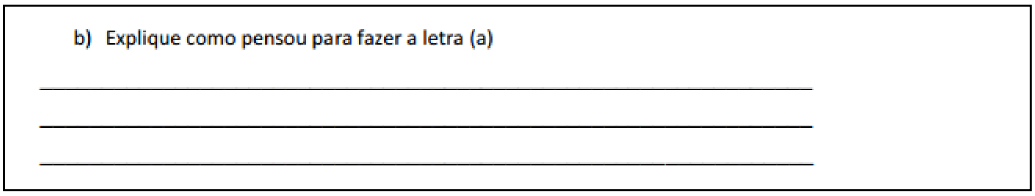
Segue exemplo da resposta de uma das duplas do Grupo 1 e outra da dupla D4:

Quadro 10: Imagens da resposta das duplas D5 e D4 para o item (a).

Resposta da dupla D5
 a) Como ficaria o desenho da figura 5? E da figura 6? A figura 5 A figura 6
Resposta da dupla D4
 a) Como ficaria o desenho da figura 5? E da figura 6? figura5=13+3=16 figura6=16+3=19

Fonte: Dados da pesquisa

4.2 Análise do item (b)



b) Explique como pensou para fazer a letra (a)

____

____

____

Com este questionamento buscávamos identificar se os alunos conseguiam expressar, em linguagem natural, a regularidade percebida na construção da sequência da figura dada. Após examinar as respostas das duplas, dividimos em dois grupos:

GRUPO 1: Aqueles que justificaram de forma suficiente a construção das figuras 5 e 6;

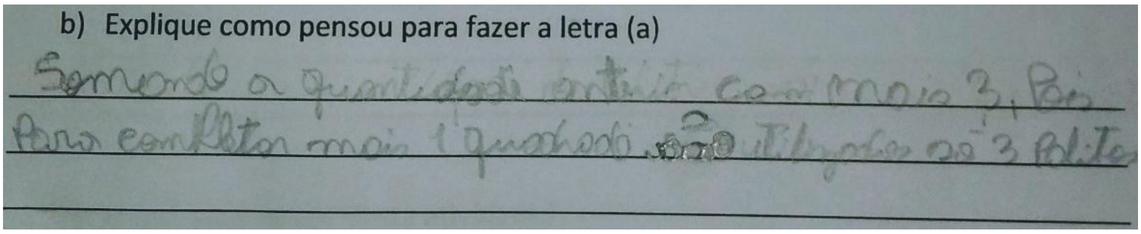
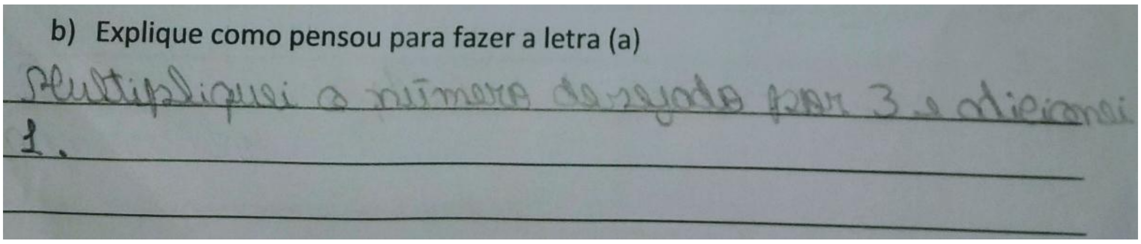
GRUPO 2: Aqueles que justificaram de forma insuficiente a construção das figuras 5 e 6.

O Grupo é formado por nove duplas. Conforme as explicações dadas, foi possível identificar dois tipos de estratégias: a *diferença recursiva*, apresentadas pelas duplas D4, D7, D8, D9, D10, D12 e D13 e a *explícita*, presente nas respostas das duplas, D5 e D6.

O primeiro subgrupo, explicam a construção da sequência, com base na diferença entre termos consecutivos, ou seja, que pega a figura anterior e acrescenta mais três palitos. Já as duas duplas do segundo subgrupo, dão indícios de ter descoberto uma regra, com base no contexto do problema, relacionando as variáveis: número da figura e quantidade de palitos. Se continuarem com esta estratégia, responderão facilmente a letra (c).

Seguem exemplos de resposta da dupla D4 que respondeu usando a estratégia diferença recursiva e da dupla D5 que respondeu usando a estratégia explícita.

Quadro 11: Imagens da resposta das duplas D4 e D5 para o item (b).

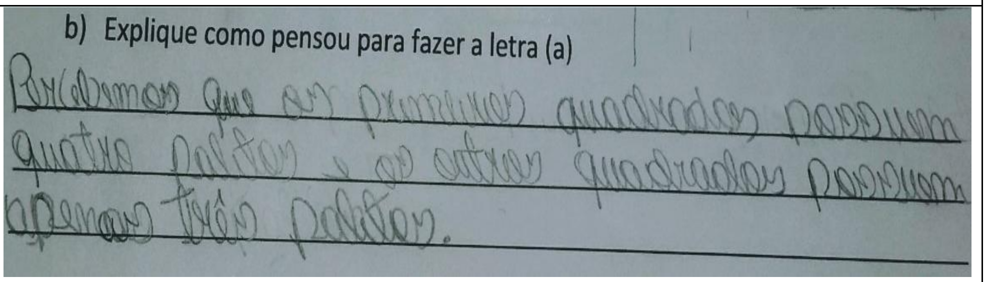
Resposta da dupla D4
 b) Explique como pensou para fazer a letra (a) Somando a quantidade anterior com mais 3, Pois Para completar mais 1 quadrado são utilizados os 3 Palitos
Resposta da dupla D5
 b) Explique como pensou para fazer a letra (a) Multipliquei o número da sequência por 3 e adicionei 1.

Fonte: Dados da pesquisa

Pedir para os alunos expressarem a forma como estão pensando, foi muito importante. Percebermos, por exemplo, que a dupla D4, ao contrário do que havíamos pensado na resposta da letra (a), não estavam próximos da estratégia *explícita*. Representaram apenas o pensamento *recursivo*.

As duplas D1, D2, D3 e D11 estão inseridos no Grupo 2, pois, por meio da explicação dada, não é possível a quem ler, conseguir construir as próximas figuras da sequência. Segue o exemplo:

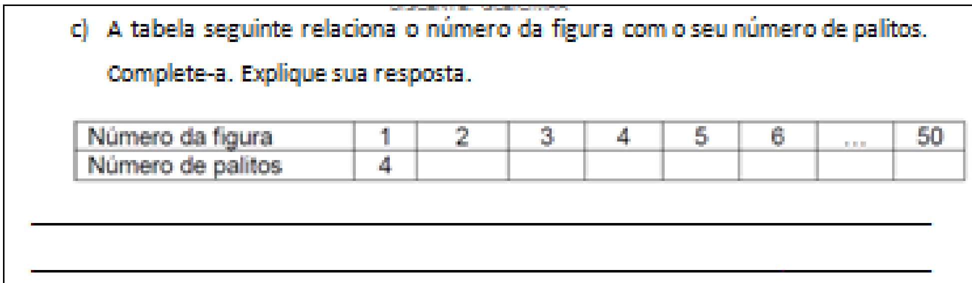
Quadro 12: Imagem da resposta da dupla D2 do item (b).

Resposta da dupla D2
 b) Explique como pensou para fazer a letra (a) Percebemos que os primeiros quadrados possuem quatro palitos e os outros quadrados possuem apenas três palitos.

Fonte: Dados da pesquisa

Nossa conjectura é de que a dupla D2 percebeu um padrão que os permite construir os termos da sequência, por meio da estratégia *diferença recursiva*. No entanto, eles sentem dificuldades para expressar, em linguagem natural, o que estão pensando.

4.3 Análise do item (c)



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Complete-a. Explique sua resposta.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4							

Com esta questão objetivamos perceber as estratégias utilizadas pelos alunos, que nos permitirá inferir se realizaram generalizações *próximas* ou *distantes*. Após examinar as respostas das duplas, conseguimos classificar em dois grupos:

GRUPO 1: Responderam corretamente apenas até a figura 6.

GRUPO 2: Responderam corretamente toda a tabela.

Estão classificados no Grupo 1, as duplas D1, D2, D3, D9 e D10.

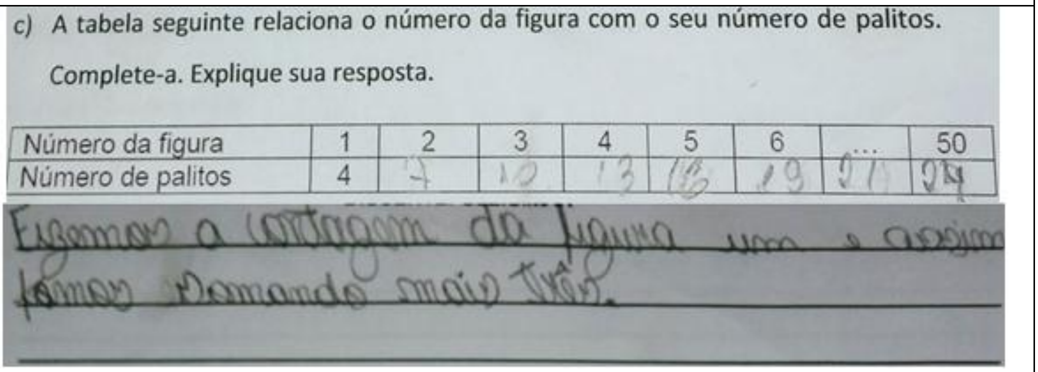
Vale ressaltar que durante a execução desse item, alguns alunos questionaram à professora/pesquisadora, a respeito do que se tratava os “três pontinhos” (reticências) que aparecia na tabela. A mesma, sem a intenção de interferir no resultado da pesquisa, informou para os alunos que os “três pontinhos” representavam todos os números das figuras da sequência que estavam entre 6 e 50, e que, para completar a tabela, *talvez* não fosse necessário escrever/conhecer o número de palitos de todos estes termos.

Notamos que as duplas D2, D3 e D9, não entenderam a explicação dada pela professora/pesquisadora, sendo que D2 e D3, compreenderam as reticências como um dos termos da sequência que era anterior ao termo 50 e sucessor ao termo 6.

A estratégia que as duplas D2 e D3 empregaram foi a *diferença recursiva*. Segue imagem da resposta da dupla D2:

Quadro 13: Imagem da resposta da dupla D2 para item (c).

Resposta da dupla D2



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos.

Complete-a. Explique sua resposta.

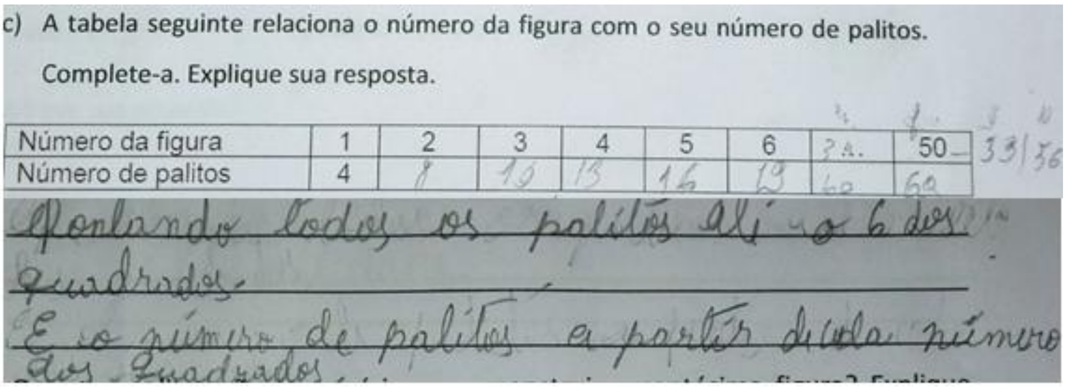
Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	21	24

Fizemos a contagem da figura uma e assim fomos somando mais três.

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla D9 deu uma resposta que se encaixa na estratégia da *contagem*, embora não tenhamos conseguido entender, como se deu a contagem. A figura seguinte mostra como completaram o quadro e a justificativa:

Quadro 14: Imagem da resposta da dupla D9 para o item (c).



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos.

Complete-a. Explique sua resposta.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	?A.	50
Número de palitos	4	8	10	13	16	19	60	69

33/56

Contando todos os palitos ali o 6 dos quadrados.

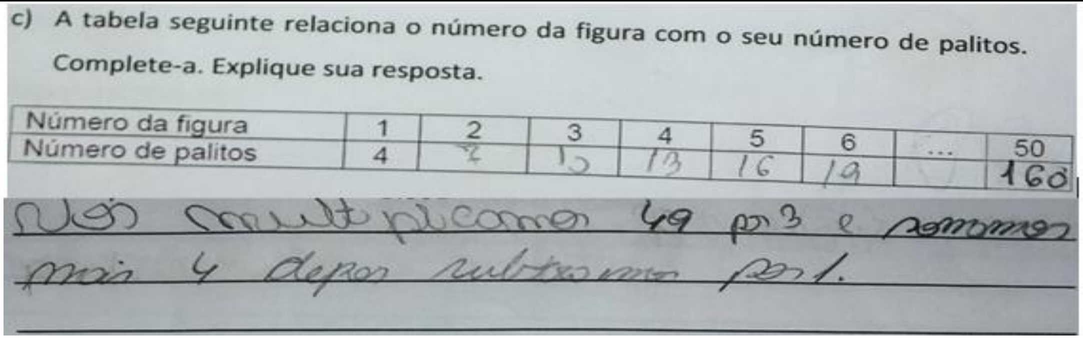
E o número de palitos a partir de cada número dos quadrados

Fonte: Dados da pesquisa

Já as duplas D1 e D10 mostraram entender a explicação dada sobre as reticências. A Dupla D1 utilizou a estratégia *múltiplo da diferença com ajuste*, na qual é usada a diferença entre os termos consecutivos, que no caso é três, como fator multiplicativo. No entanto, a dupla não fez o ajuste corretamente, como mostra a imagem seguinte:

Quadro 15: Imagem da resposta da dupla D1 para item (c).

Resposta da dupla D1



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Complete-a. Explique sua resposta.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4	7	10	13	16	19		160

Nós multiplicamos 49 por 3 e somamos mais 4 depois subtraimos por 1.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos aqui que a dupla D1 apresentou uma estratégia boa, mas acabou cometendo dois "deslizes". O primeiro de "conta", pois *49.3 =147*, *147+4=151* e *151-1=150*, não *160* como responderam.

O segundo deslize foi no ajuste contextual. Eles teriam que fazer *49.3 =147*, *147+4=151*. Onde está o "deslize" da estratégia? Eles não precisariam retirar 1 palito.

Para exemplificar a estratégia da dupla, a reproduzimos para o caso de calcular o número de palitos da figura 3, como mostra a gravura do quadro seguinte:

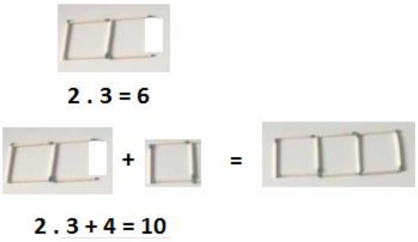


Figura 13: Exemplificando a estratégia da dupla D1 para o item (c)

Fonte: autoria própria

Contextualmente, quando fazemos a multiplicação de *dois por três*, *quarenta e nove por três*, e assim sucessivamente; estamos pegando a quantidade de palitos da figura anterior à que queremos calcular, com um palito a menos. Assim, os 4 palitos podem ser acrescentados *sem sobreposição*, ou seja, a dupla D1 não precisaria fazer a subtração.

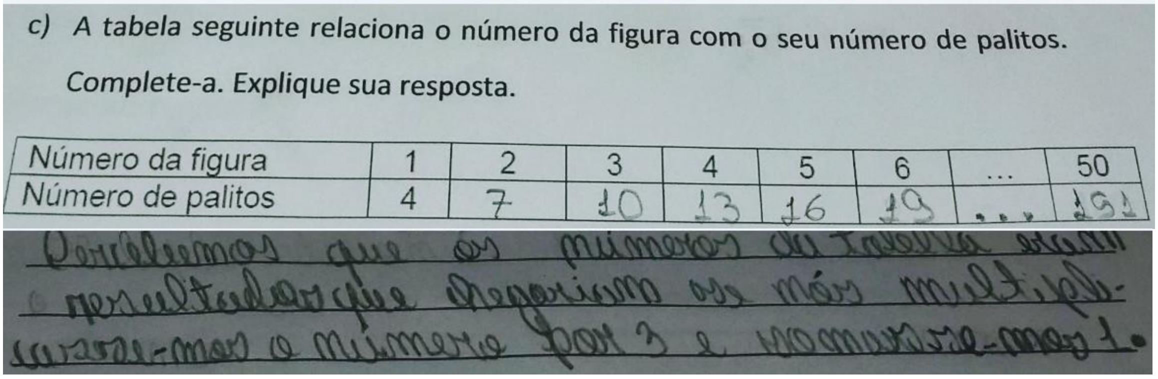
Conforme Barbosa (2009) assegurou, a estratégia *múltiplo da diferença com ajuste*, nem sempre é fácil para os alunos. A resposta da dupla D1 comprova a nossa conjectura de que se alguma dupla desenvolvesse este tipo de estratégia, iriam obter uma resposta incorreta, exatamente por causa do ajuste contextual.

Com relação ao Grupo (2) foi formado por alunos que responderam corretamente toda a tabela. Neste grupo fizeram parte as duplas D4, D5, D6, D7, D11, D12, D13, D8.

Neste grupo percebemos três tipos diferentes de estratégia. As duplas D5 e D6 utilizaram a estratégia *explícita*, criando regras para determinar imediatamente a quantidade de palitos da figura 50.

Quadro 16: Imagem da resposta da dupla D5 para o item (c).

Resposta da dupla D5



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos.

Complete-a. Explique sua resposta.

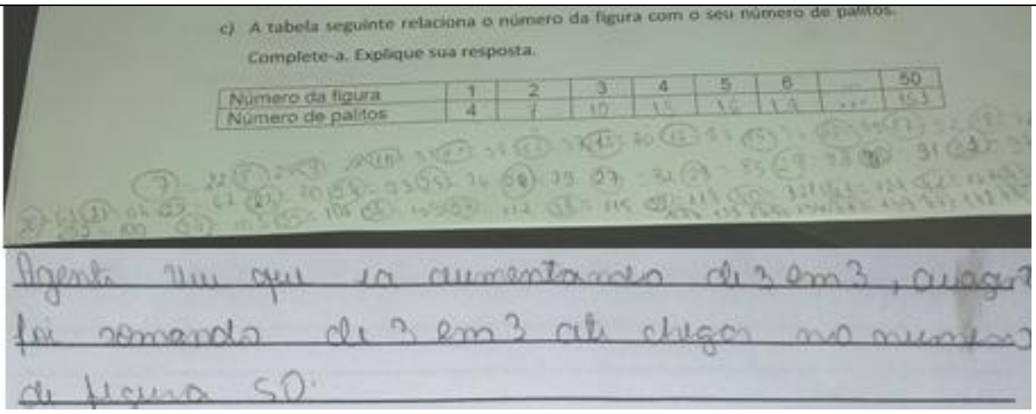
Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	...	151

Percebemos que os números da tabela eram
o resultados que chegariamo se nós multipli-
cassemos o número por 3 e somassemos 1.

Fonte: Dados da pesquisa

As duplas D8 e D13 utilizaram a estratégia *diferença recursiva*, pois conforme explicaram, continuaram a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.

Quadro 17: Imagem da resposta da dupla D13 para o item (c).

Resposta da dupla D13


c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Complete-a. Explique sua resposta.

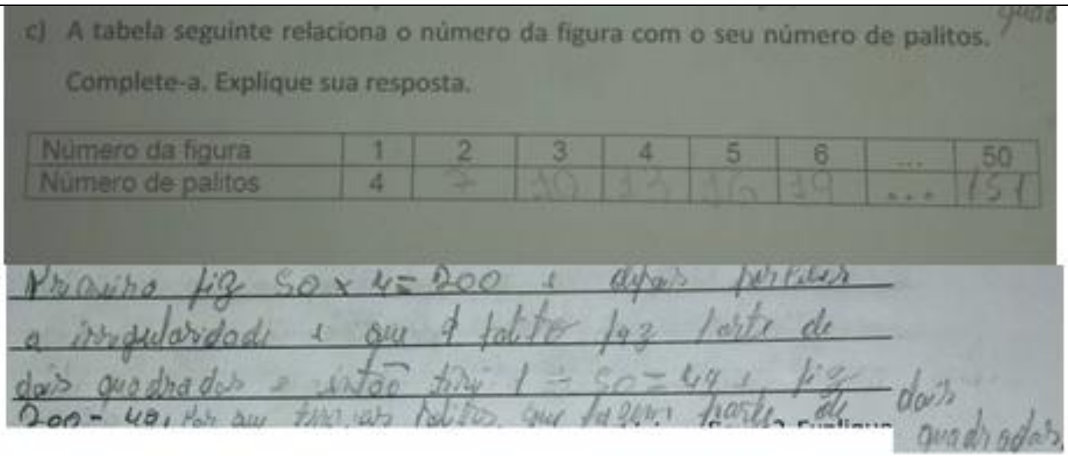
Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	...	153

Agente viu que ia aumentando de 3 em 3, aí ago
foi somando de 3 em 3 até chegar no númer
da figura 50.

Fonte: Dados da pesquisa

Já as duplas D4, D7, D11 e D12 mobilizaram a estratégia *termo unidade com ajuste contextual*. Todos tomaram a figura 1 da sequência que contém o quadrado com 4 palitos e usaram múltiplos desta unidade. Em seguida, fizeram o ajuste contextual, levando em consideração a sobreposição de palitos. Segue a resposta da dupla D7.

Quadro 18: Imagem da resposta da dupla D7 para o item (c).

Resposta da dupla D7


c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Complete-a. Explique sua resposta.

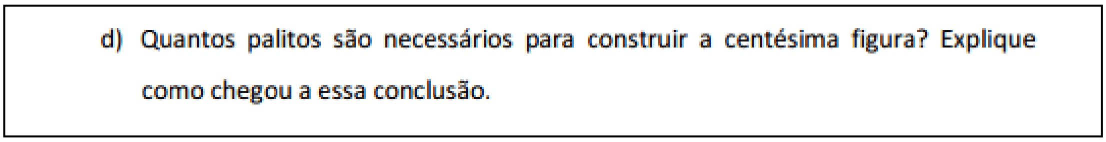
Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	...	151

Primeiro fiz 50 × 4 = 200 e depois percebeu
a irregularidade e que 1 palito faz parte de
dois quadrados e então tirei 1 ÷ 50 = 49 e fiz
200 − 49, para eu tirar os palitos que fazem parte de dois quadrados.

Fonte: Dados da pesquisa

Neste item apenas a dupla D9 mobilizou a estratégia de *contagem*. Nossa conjectura é que este resultado pode ter sido influenciado pela explicação da professora/pesquisadora, justificando o abandono das demais duplas da estratégia supracitada.

4.4 Análise do item (d)



d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

Com a indagação acima tínhamos a intenção de verificar a potencialidade dos alunos em descobrir uma regra, com base no contexto do problema, relacionando as variáveis envolvidas (número da figura e número de palitos), permitindo o cálculo imediato da centésima figura. Com isto, chegar à *generalização distante*.

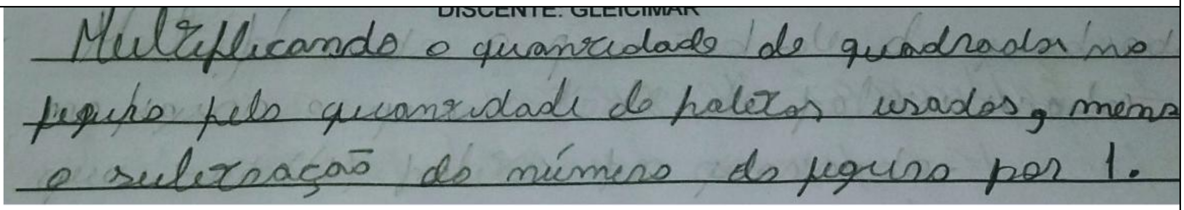
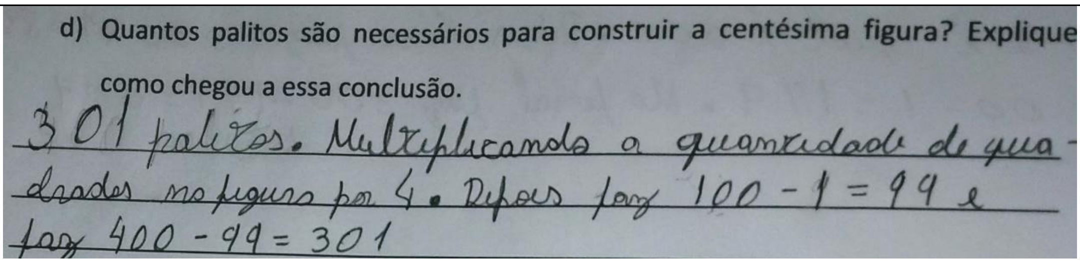
Neste item, de acordo com as respostas dadas, separamos as duplas em dois grupos:

GRUPO 1: Os que responderam corretamente.

GRUPO 2: Os que não responderam corretamente.

As duplas D4, D11, D12, D5 e D7 se encaixaram no Grupo 1. Responderam corretamente, utilizando uma regra percebida no item (c), mostrando que utilizaram a estratégia *explícita*, onde a regra descoberta é válida para encontrar termos distantes da sequência. Segue o exemplo:

Quadro 19: Imagem da resposta da dupla D12 para os itens (c) e (d).

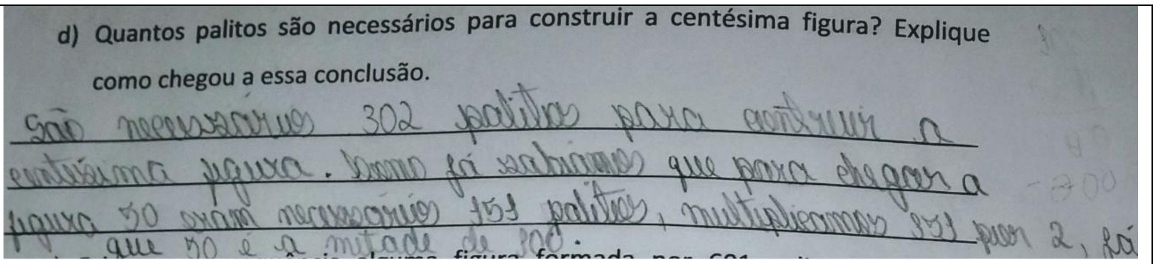
Resposta da dupla D12 item (c)
 DISCENTE: GLEICIMAR Multiplicando o quantidade de quadrados na figura pelo quantidade de palitos usados, menos a subtração do número da figura por 1.
Resposta da dupla D12 item (d)
 d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão. 301 palitos. Multiplicando a quantidade de quadrados na figura por 4. Depois faz 100 - 1 = 99 e faz 400 - 99 = 301

Fonte: Dados da pesquisa

No Grupo2, composto pelas duplas D1, D2, D3, D6, D8, D9 e D13, identificamos três estratégias diferentes: *termo unidade, tentativa e erro* e *diferença recursiva*.

As duplas D8 e D6 utilizaram a estratégia *termo unidade*, conforme mostra a imagem no quadro que segue:

Quadro 20: Imagem da resposta da dupla D8 para o item (d).



d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

São necessários 302 palitos para construir a centésima figura. Como já sabíamos que para chegar a figura 50 eram necessários 151 palitos, multiplicamos 151 por 2, já que 50 é a metade de 100.

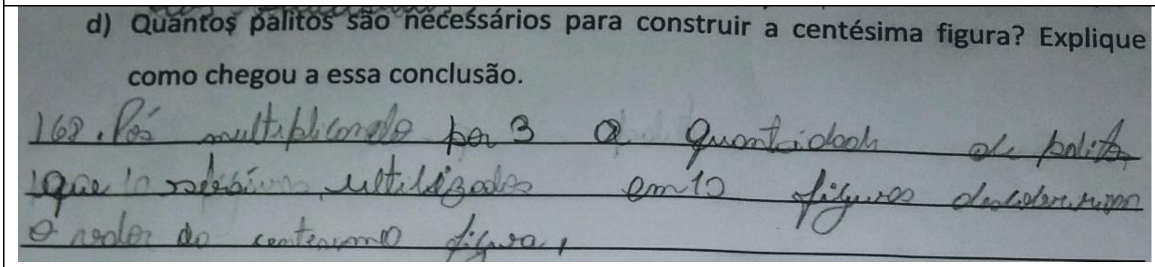
Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, para chegar ao resultado correto, a dupla precisava fazer o *ajuste contextual*. Neste caso, a dupla teria que subtrair um, que é exatamente o palito que ficaria sobreposto quando juntasse duas sequências da figura 50. Assim, o correto seria fazer *151.2 = 302 e 302-1=301*.

AS duplas D2 e D9 utilizaram a estratégia termo unidade, pois utilizaram a quantidade de palitos de um termo da sequencia como unidade, usando múltiplos desse termo.

A dupla D9 tomou como unidade o termo 10 da sequencia, que segundo eles tinha 56 palitos e multiplicaram esse valor por 3, chegando a resposta 168, a qual não está correta. De modo análogo a dupla D2 tomou como unidade o termo 5 da sequencia a qual tinha 16 palitos e multiplicaram esse valor por 10 encontrando a resposta incorreta 160. Seguem os exemplos:

Quadro 21: Imagem da resposta da dupla D9 para o item (d).

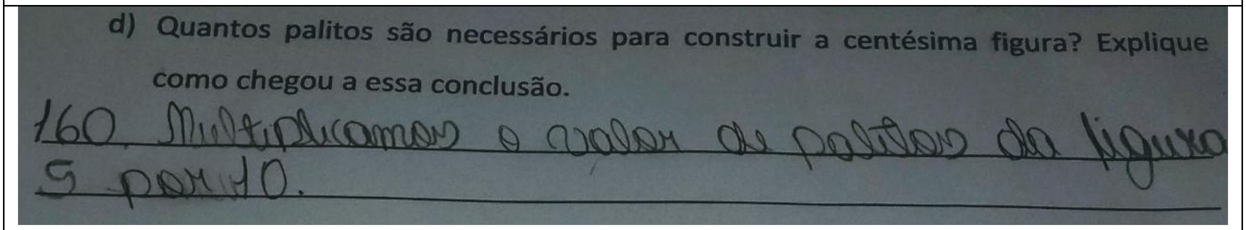
Resposta da dupla D9


d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

168. Pós multiplicando por 3 a quantidade de palitos
que 10 seriam utilizados em 10 figuras descobrimos
o valor da centesimo figura,

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 22: Imagem da resposta da dupla D2 para o item (d).

Resposta da dupla D2


d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

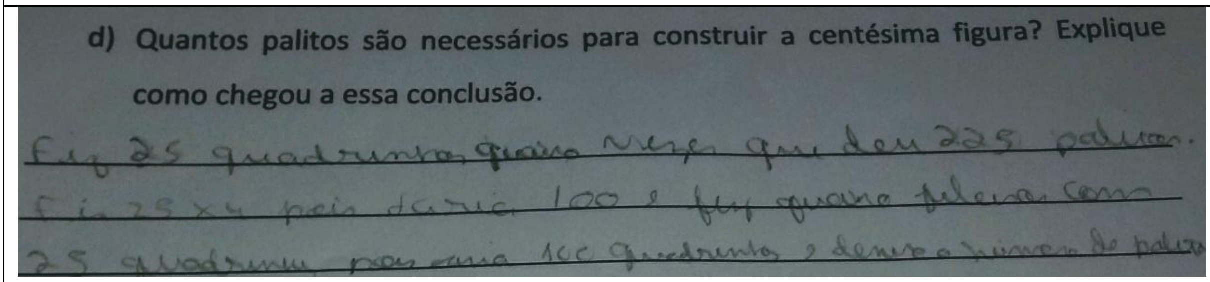
160. Multiplicamos o valor de palitos da figura
5 por 10.

Fonte: Dados da pesquisa

A estratégia de *tentativa e erro* foi realizada pelas duplas D1e D3, as quais buscaram encontrar uma regra fazendo tentativas com diferentes valores. A dupla D1 somou a quantidade de palitos da figura 50 que segundo eles era 160 com o número 50, juntando variáveis diferentes, quantidade de palitos (160) com posição da figura (50) chegando a resposta incorreta 210. Já a dupla D3 faz tentativas orientadas de modo a chegar ao número 100. Como podemos ver nos exemplos:

Quadro 23: Imagem da resposta da dupla D3 para o item (d).

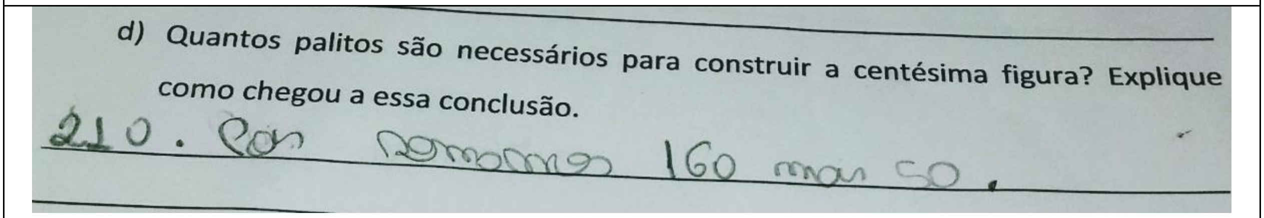
Resposta da dupla D3



d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

Fiz 25 quadrinhos quatro vezes que deu 225 palitos. Fiz 25x4 pois daria 100 e fiz quatro fileiras com 25 quadrinhos para dar 100 quadrinhos e deu o número de pali

Resposta da dupla D1



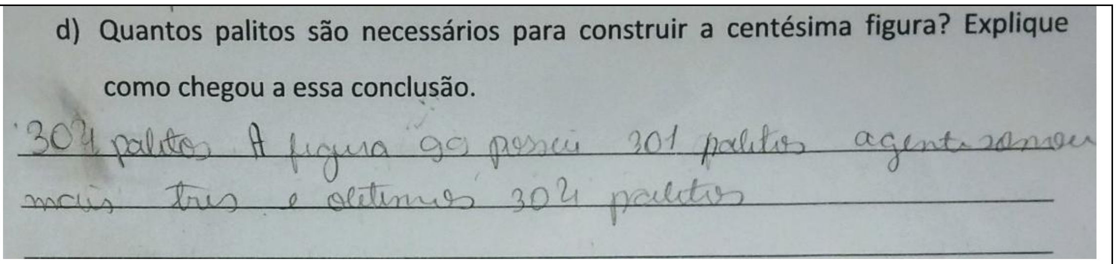
d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

210. Por somamos 160 mais 50.

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla D13 também faz parte do Grupo 2 e continuam recorrendo à estratégia da *diferença recursiva*. Percebemos, de acordo com a resposta dada, que a dupla foi acrescentando o número três a cada termo da sequência, mas que, em algum momento, erram nos cálculos, encontrando 301 palitos para a figura 99, conforme imagem no quadro seguinte:

Quadro 24: Imagem da resposta da dupla D13 para o item (d).



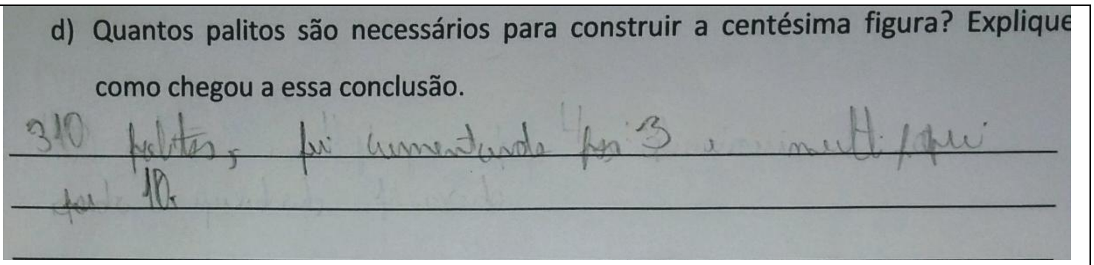
d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

304 palitos A figura 99 possui 301 palitos agente somou mais tres e obtemos 304 palitos

Fonte: Dados da pesquisa

Encerrando a análise do Grupo2, temos a dupla D10, que mobilizaram a estratégia *múltiplo da diferença com ajuste*. Porém, o ajuste foi feito de maneira incorreta, conforme mostra a imagem que segue:

Quadro 25: Imagem da resposta da dupla D10 para o item (d).

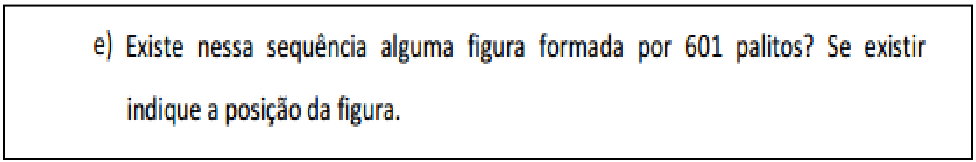


d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

310 palitos, fui aumentando por 3 e multipliquei por 10.

Fonte: Dados da pesquisa

4.5 Análise do item (e)



e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se existir indique a posição da figura.

O objetivo desse questionamento foi o de verificar a reversibilidade do pensamento dos alunos. Para examinar esta questão as duplas foram divididas em dois grupos:

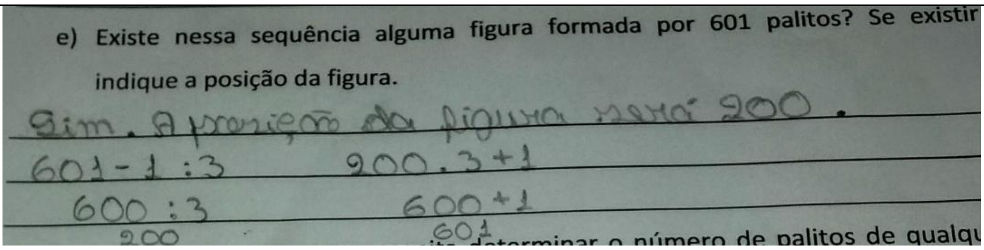
GRUPO 1: Aqueles que responderam sim.

GRUPO 2: aqueles que responderam não.

Dentre as duplas que responderam, de acordo com o primeiro grupo, identificamos três estratégias diferentes: *explícita*, *termo unidade com ajuste contextual* e *tentativa e erro*.

As duplas, D5, D6, e D11 utilizaram a estratégia *explícita*, sendo que D6 e D11, empregaram a regra usada no item (d), fazendo as devidas substituições. Já a dupla D5, utilizou a reversibilidade, usando a regra descoberta no sentido inverso, conforme mostra a imagem seguinte:

Quadro 26: Imagem da resposta da dupla D5 para o item (e).



e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se existir indique a posição da figura.

Sim. A posição da figura será 200.

601 - 1 : 3   200 . 3 + 1

600 : 3   600 + 1

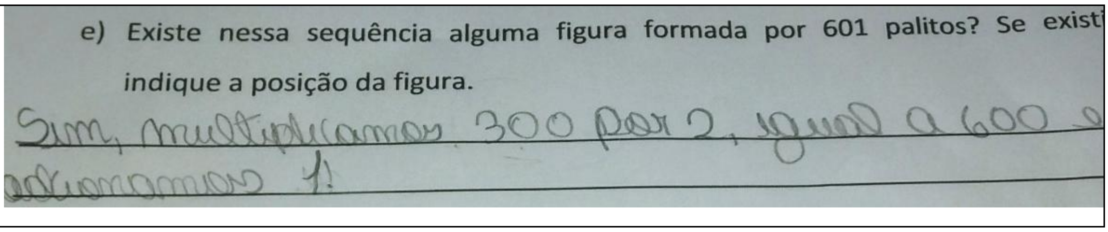
200   601

determinar o número de palitos de qualqu

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla D2 utilizou a estratégia *tentativa e erro*, pois sabendo que a quantidade de palitos era 601, eles fizeram uma tentativa para chegar a esse resultado.

Quadro 27: Imagem da resposta da dupla D2 para o item (e).



e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se exist

indique a posição da figura.

Sim, multiplicamos 300 por 2, igual a 600

adicionamos 1!

Fonte: Dados da pesquisa

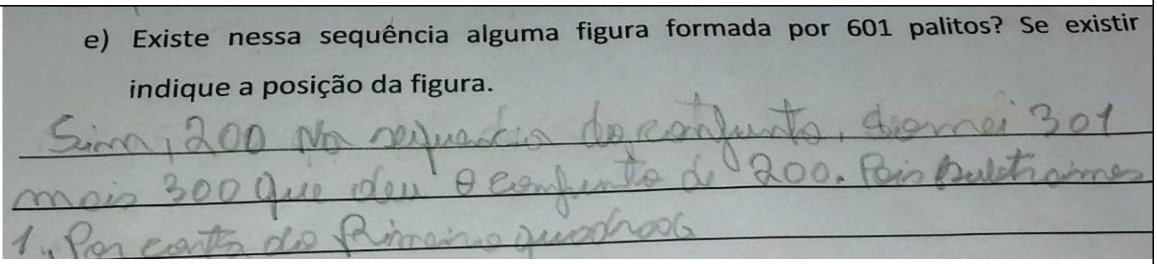
A estratégia *termo unidade com ajuste contextual* foi mobilizada pelas duplas D12, D8, D4 e D3. Nessa estratégia, os alunos tomaram uma figura como termo unidade (a figura de posição 100) e utilizaram múltiplos dessa figura realizando um ajuste contextual ao resultado por considerar a sobreposição dos palitos da parte interna da figura.

A dupla D8 realiza o ajuste contextual de maneira correta, porém, como no item (d) não ajustaram o resultado referente a quantidade de palitos da figura 100, ocasionou um erro no item (e).

Notamos também que as duplas D4 e D12 realizaram ajustes contextuais de formas diferentes. A primeira calcula a quantidade de palitos total, já considerando a sobreposição dos palitos desde o início da contagem e só subtrai o palito sobreposto do primeiro quadrado no final. Já a segunda dupla, considera todos os quadrados da figura com quatro palitos sem considerar as sobreposições mas ajusta todas elas de uma só vez no final do cálculo; ambos pensamentos levam a uma resposta correta, como mostra as imagens seguintes:

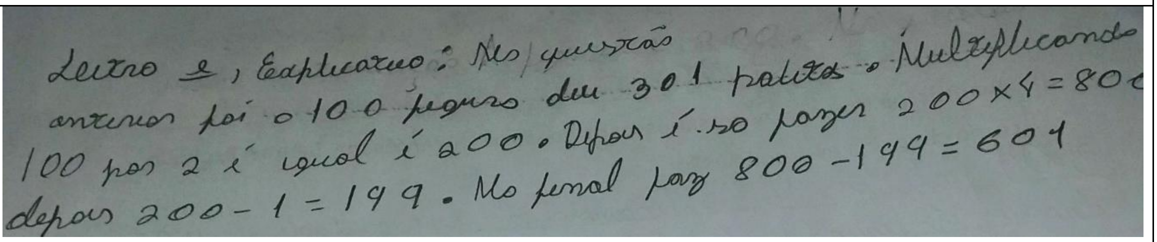
Quadro 28: Imagens da resposta das duplas D4 e D12 para o item (e).

Resposta da dupla D4


e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se existir indique a posição da figura.

Sim, 200 Na sequência do conjunto, somei 301
mais 300 que deu o conjunto de 200. Pois subtraimos
1. Por conta do Primeiro quadrado

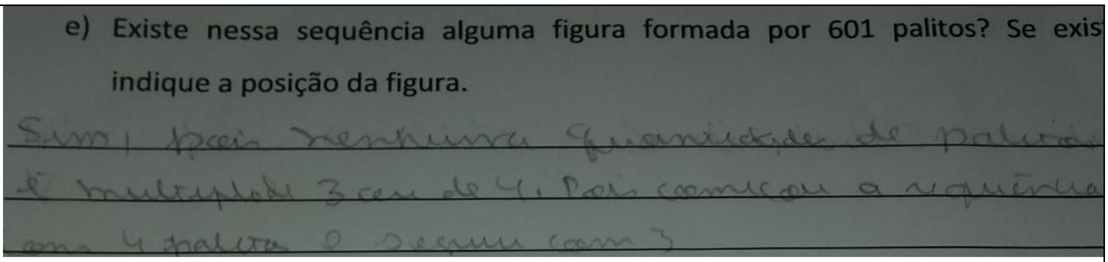
Resposta da dupla D12


Letra e, Explicação: Nas questões Multiplicando
anteriores foi o 100 figura deu 301 palitos. 200×4=800
100 por 2 é igual é 200. Depois é só fazer
depois 200-1=199. No final faz 800-199=601

Fonte: Dados da pesquisa

Ainda com relação ao Grupo1, encontramos a dupla D3 que respondeu que existe uma figura formada por 601 palitos, porém, não conseguiram determinar qual a posição da figura. Acreditamos que o motivo foi o de não terem descoberto uma regra nas questões (c) e (d). A dupla ainda continua presa à estratégia da diferença recursiva, como podemos perceber na resposta a seguir.

Quadro 29: Imagem da resposta da dupla D3 para o item (e).

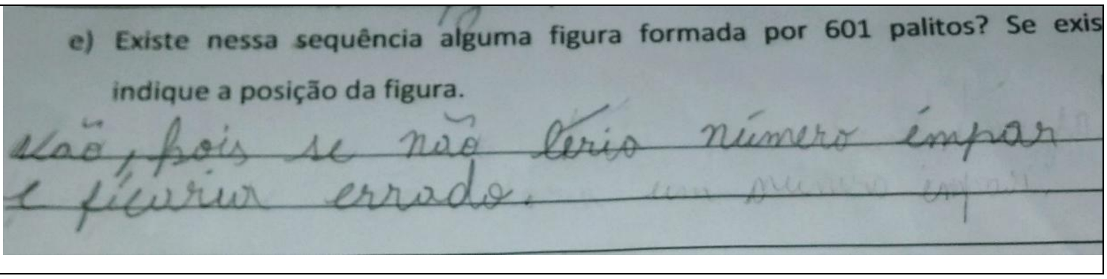

e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se exis
indique a posição da figura.

Sim, pois nenhuma quantidade de palitos
é multiplo de 3 ou de 4. Pois começou a sequência
com 4 palitos e seguiu com 3

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando agora o Grupo 2, em que se encontram os alunos que responderam que não existe nessa sequência nenhuma figura formada por 601 palitos, identificamos que as duplas D9 e D1 não reconhecem o contexto do problema, portanto não consideram a sobreposição dos palitos, dessa forma eles acreditam que todas as figuras devem possuir uma quantidade par de palitos. Pode-se então entender que as duplas estão considerando o quadrado como *termo unidade* e utilizando seus múltiplos sem fazer nenhum ajuste.

Quadro 30: Imagem da resposta da dupla D9 para o item (e).



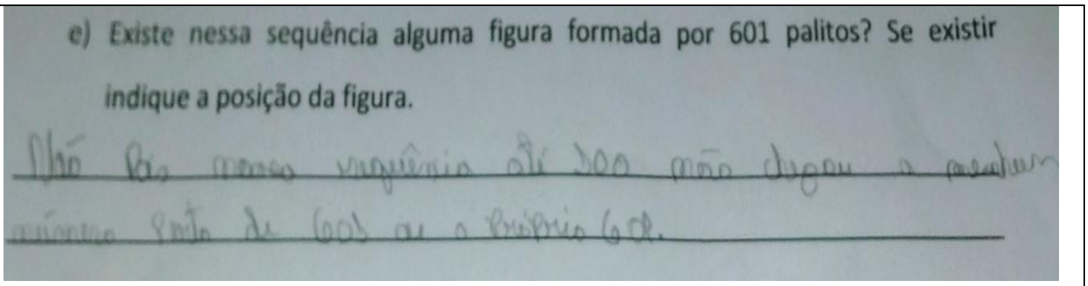
e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se exis
indique a posição da figura.

Não, pois se não seria número ímpar
e ficaria errado.

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla D13 não entende que a sequência pode continuar infinitamente, mostrando dificuldade em generalizações distantes, de acordo com o pensamento da dupla a sequência termina na figura de posição 100. Conjecturamos que a dupla está presa a estratégia *diferença recursiva*, justificando o uso de generalizações próximas apenas.

Quadro 31: Imagem da resposta da dupla D13 para o item (e).



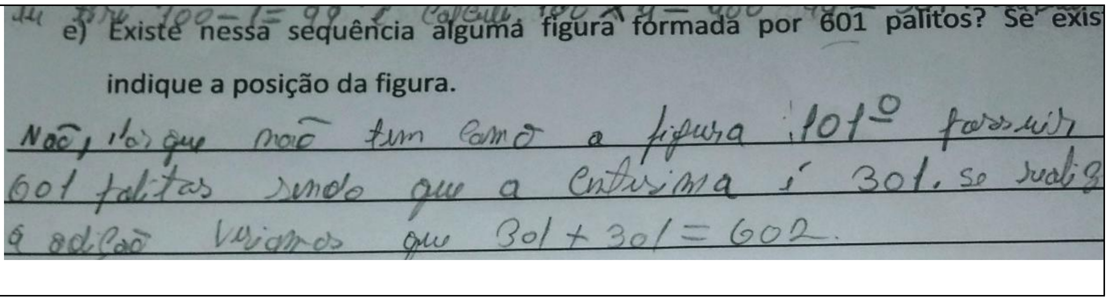
e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se existir
indique a posição da figura.

Não pois nossa sequência até 300 não chegou a nenhum
número perto de 601 ou o próprio 601.

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla D7 utiliza a centésima figura da sequencia como *termo unidade* que contém 301 palitos e somam esse valor duas vezes encontrando 602, porém a dupla não realiza nenhum ajuste ao resultado. Além disso, a dupla conjectura que o termo da sequencia que possui 602 palitos é o termo 101 e não o termo 200, mostrando que não utilizaram a ideia de múltiplos e sim de que o termo com 601 palitos deveria ser consecutivo ao termo 100 da sequencia.

Quadro 32: Imagem da resposta da dupla D7 para o item (e).



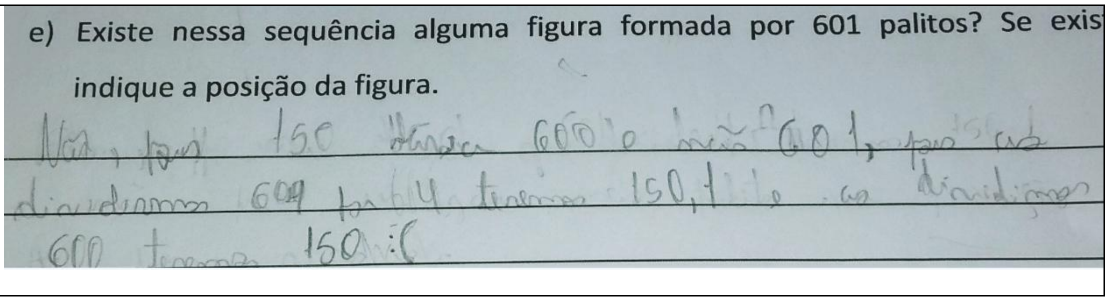
e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se exis
indique a posição da figura.

Não, porque não tem como a figura 101º possuir 601 palitos sendo que a centésima é 301. se realiza a adição veríamos que 301 + 301 = 602.

Fonte: Dados da pesquisa

Na resposta da dupla D10 identificamos indícios da estratégia *termo unidade*, no qual fazem o cálculo dos números dos palitos multiplicando o número da posição da figura por 4, pois contextualmente, estão visualizando a figura composta por “quadrados”. Por isso, pegam 150 e multiplicam por 4, achando 600, referindo-se a quantidade de palitos. A resposta da dupla mostra que os mesmos não conseguiram reverter o pensamento. Não perceberam que a questão pede a *posição da figura*.

Quadro 33: Imagem da resposta da dupla D10 para o item (e).

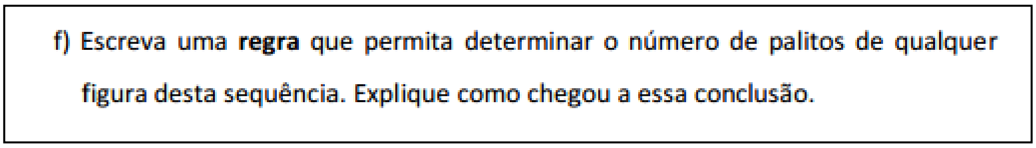


e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se exis
indique a posição da figura.

Não, pois 150 dará 600 e não 601, pois se dividirmos 600 por 4 teremos 150, então se dividirmos 600 teremos 150 :(

Fonte: Dados da pesquisa

4.6 Análise do item (f)



f) Escreva uma **regra** que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão.

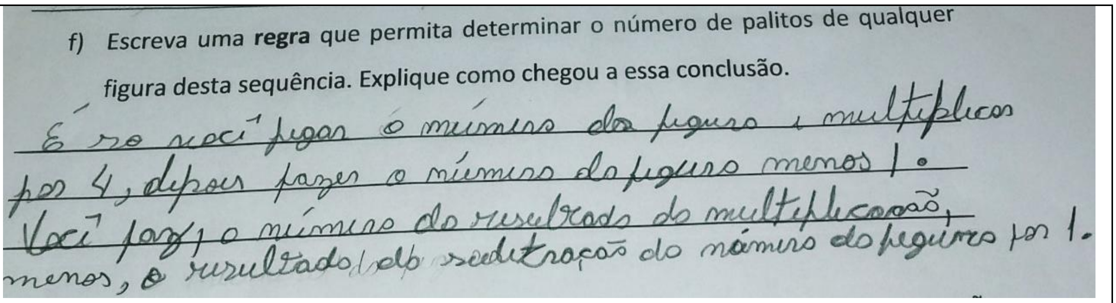
Com este questionamento buscava-se identificar a habilidade dos alunos em perceber regularidades nas figuras e a capacidade de sintetizar os fatos na forma de uma regra, válida para qualquer desenho da sequencia. Como de costume as duplas foram separadas em grupos para melhor análise:

GRUPO 1: Aqueles que conseguiram escrever uma regra válida para determinar a quantidade de palitos de qualquer figura da sequência.

GRUPO 2: Aqueles que não conseguiram escrever uma regra que fosse válida para determinar a quantidade de palitos de qualquer figura.

As duplas D7 e D12 utilizaram a estratégia *explícita* e conseguem determinar uma regra que permite determinar a quantidade de palitos de uma figura em qualquer posição, de maneira imediata. Eles perceberam que para formar um quadrado precisam de quatro palitos, porém, existem palitos sobrepostos, portanto eles ajustam o resultado subtraindo os palitos que se sobrepõem na parte interior da figura. Essas duplas mostraram que já são capazes de realizar *generalizações distantes*.

Quadro 34: Imagem da resposta da dupla D12 para o item (f).



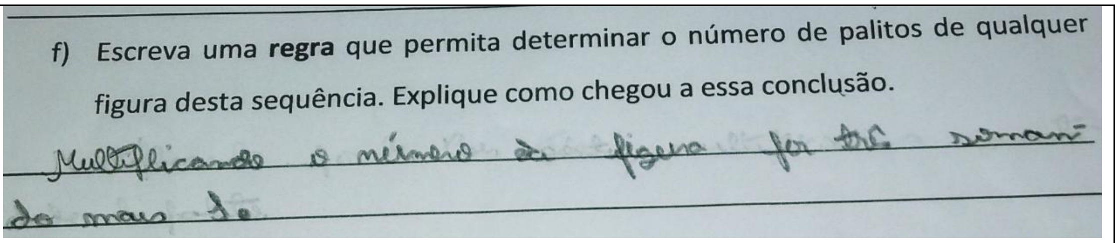
f) Escreva uma **regra** que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão.

É só você pegar o número da figura e multiplicar por 4, depois fazer o número da figura menos 1. Você faz, o número do resultado da multiplicação, menos, o resultado da subtração do número da figura por 1.

Fonte: Dados da pesquisa

As duplas D4, D5, D6 e D11 também utilizaram a estratégia *explícita*, mostraram possuir a habilidade em escrever uma regra que possibilite determinar a quantidade de palitos de uma figura qualquer da sequência. Porém, chegaram a uma regra diferente das duplas D7 e D12, como mostra a imagem seguinte:

Quadro 35: Imagem da resposta da dupla D12 para o item (f).



f) Escreva uma **regra** que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão.

Multiplicando o número da figura por três somando mais 1.

Fonte: Dados da pesquisa

Neste caso, as duplas D4, D5, D6 e D11perceberam que podem contar, em grupos de três palitos e somando o último palito, conforme exemplo da figura seguinte:

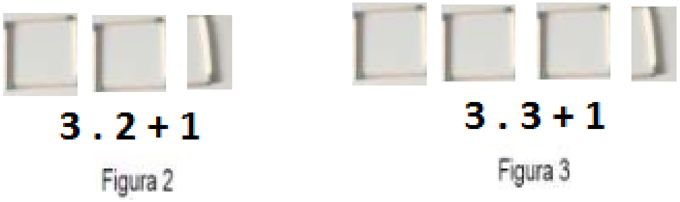
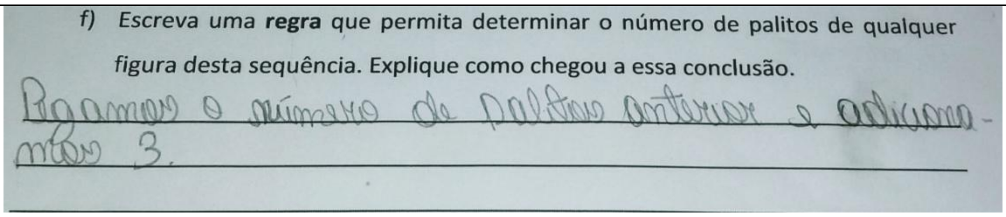
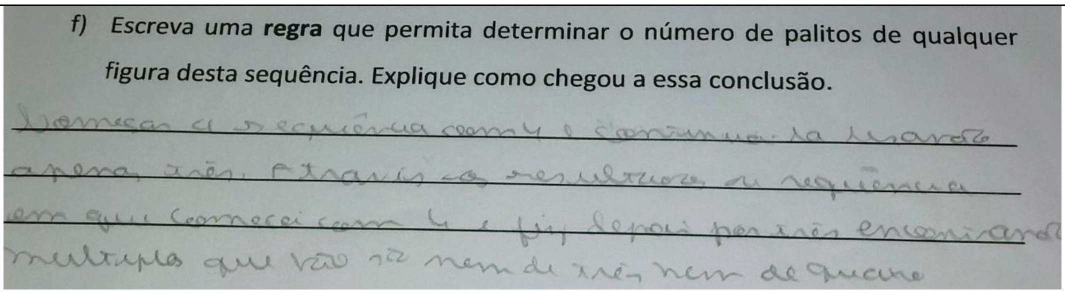
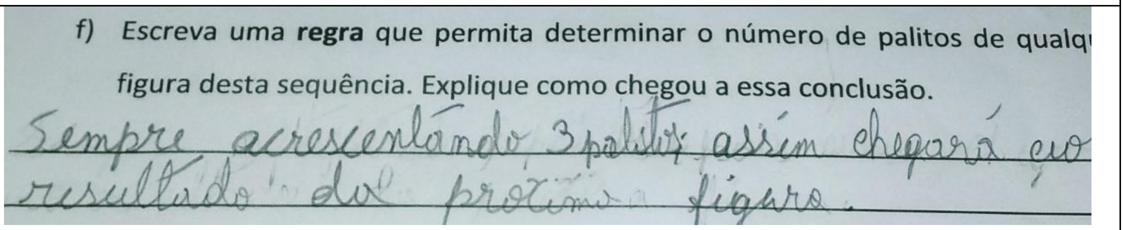


Figura 14: Simulação da padrão percebido pelas duplas D4, D5, D6 e D11

Fonte: autoria própria

Com relação ao Grupo 2, as duplas D2, D3, D8, D9 e D13 mostraram estar utilizando a estratégia *diferença recursiva*, pois de acordo com as respostas analisadas elas estão usando sempre a figura anterior como referência. Portanto, as regras escritas por essas duplas não são eficientes para determinar a quantidade de palitos de uma figura numa posição qualquer da sequência. As duplas citadas demonstraram processos de uma *generalização próxima*.

Quadro 36: Imagem da resposta da dupla D2, D3 e D9 para o item (f).

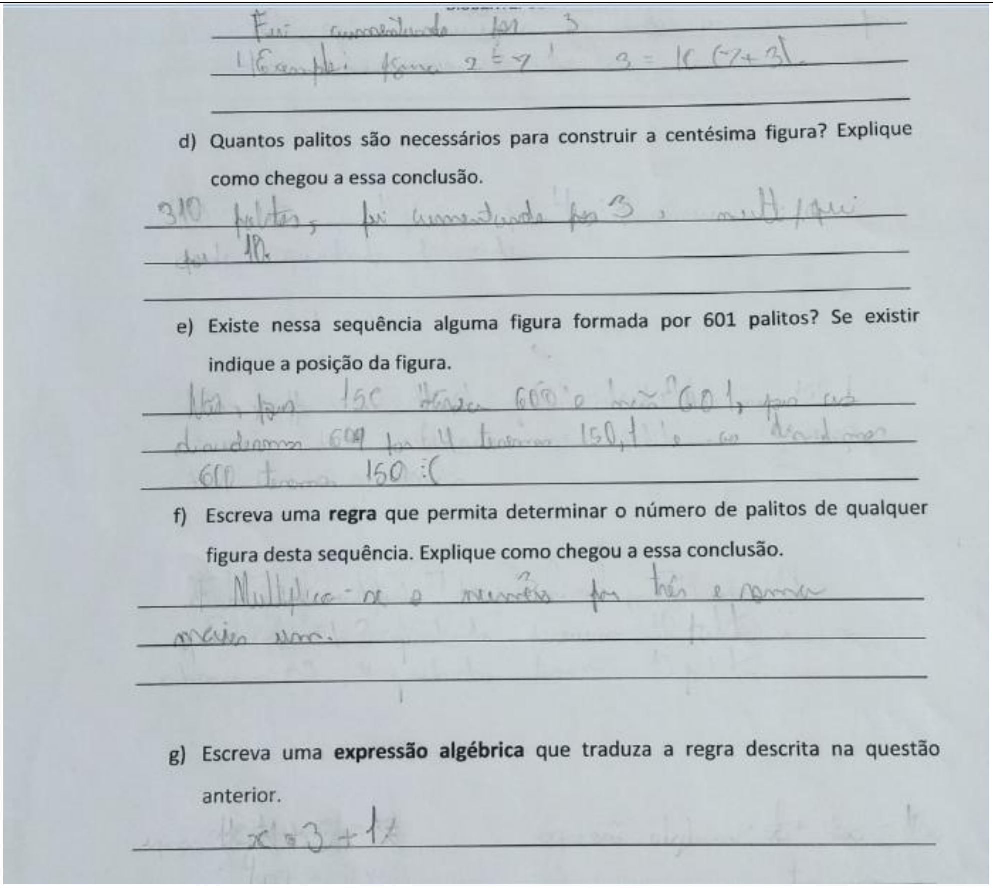
Resposta da dupla D2
 f) Escreva uma **regra** que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão. Pegamos o número de palitos anterior e adicionamos 3.
Resposta da dupla D3
 f) Escreva uma **regra** que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão. Começa a sequência com 4 e continua ta usando apenas três. Através dos resultados a sequência em que comecei com 4 e fiz depois por três encontrando multiplos que vão não nem de três nem de quatro
Resposta da dupla D9
 f) Escreva uma **regra** que permita determinar o número de palitos de qualq figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão. Sempre acrescentando 3 palitos assim chegará ao resultado da proxima figura.

Fonte: Dados da pesquisa

As duplas D1 e D10 não foram classificadas por nenhum dos dois grupos descritos acima, pois as respostas dadas no item (f) e (g) não foram coerentes com as suas respostas dos itens anteriores, caracterizando que esses alunos podem ter visto resposta de algum colega e assim ter deixado de lado as suas próprias estratégias condizentes com as suas respostas anteriores. Segue um exemplo:

Quadro 37: Imagem da resposta da dupla D10 para os itens (d), (e), (f) e (g).

Respostas da dupla D10



Fui aumentando por 3

(Exemplo: figura 2 = 7 ; 3 = 10 (7+3).

d) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explique como chegou a essa conclusão.

310 palitos, fui aumentando por 3, multipliquei por 10.

e) Existe nessa sequência alguma figura formada por 601 palitos? Se existir indique a posição da figura.

Não, pois 150 tinha 600 e não 601, pois nós dividimos 600 por 4 tivemos 150, e se dividimos 600 temos 150 :(

f) Escreva uma **regra** que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão.

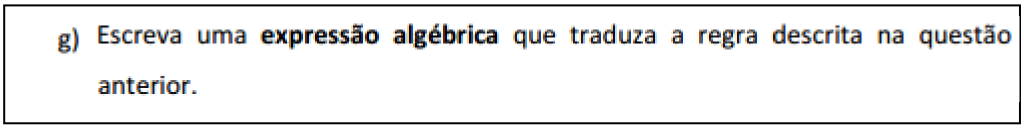
Multiplica-se o número por três e soma mais um.

g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior.

$x \cdot 3 + 1$

Fonte: Dados da pesquisa

4.7 Análise do item (g)



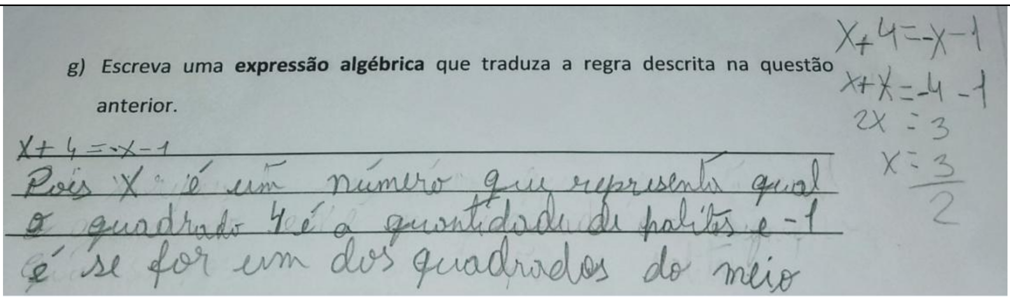
g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior.

Este questionamento tem como objetivo verificar se os alunos possuem habilidade em traduzir da linguagem natural para a linguagem algébrica. Neste item verificamos que quase todos os alunos conseguiram traduzir a regra escrita em linguagem simbólica, de uma maneira correta.

O fato da professora/pesquisadora, já haver iniciado o trabalho com expressões e equações algébricas, quando esta atividade foi aplicada, pode ter sido um dos motivos do acerto das duplas nesse item, pois já estavam familiarizados com as notações.

Até a dupla D9, que no item (f) que estão presos à estratégia da *diferença recursiva*, no entanto no item (h), se esforçam para escrever uma expressão que traduza o que estão pensando, como ilustrado na imagem seguinte:

Quadro 38: Imagem da resposta da dupla D9 para o item (g).



g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior.

$X + 4 = -X - 1$

Pois X é um número que representa qual o quadrado 4 é a quantidade de palitos e -1 é se for um dos quadrados do meio

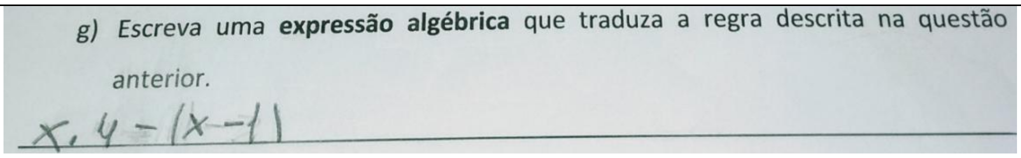
$X + 4 = -X - 1$
$X + X = -4 - 1$
$2X = 3$
$X = \frac{3}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa

As duplas D7 e D12 que escreveram no item anterior uma regra que permite encontrar a quantidade de palitos de uma figura qualquer da sequência , conseguem traduzir, de maneira coerente, a regra percebida, escrita em linguagem algébrica.

Quadro 39: Imagem da resposta da dupla D7 e D12 para o item (g).

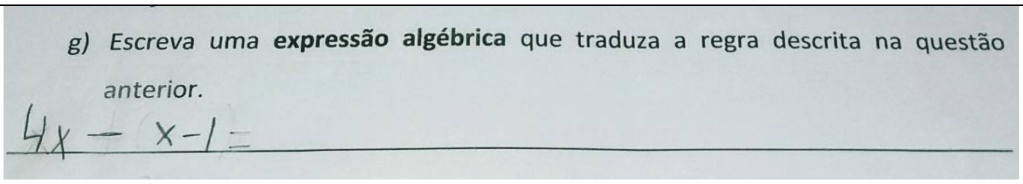
Resposta da dupla D2



g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior.

$x \cdot 4 - (x - 1)$

Resposta da dupla D12



g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior.

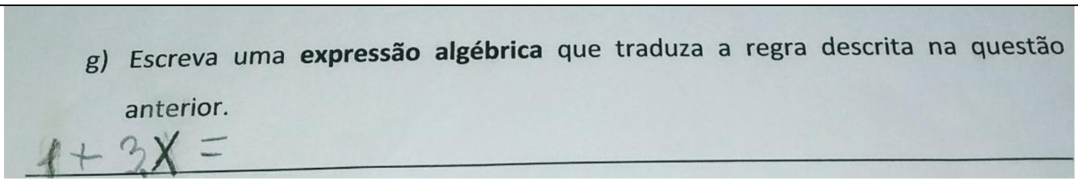
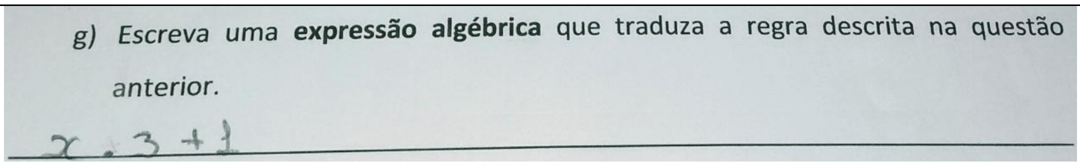
$4x - x - 1 =$

Fonte: Dados da pesquisa

Vale ressaltar que a dupla D12, ao escrever a expressão algébrica, não escreve os parênteses, o que levaria a erros no cálculo da quantidade de palitos das figuras. Neste sentido, destacamos a importância da socialização das respostas, onde tais equívocos poderão ser discutidos e sanados junto com os alunos.

As duplas D4, D5, D6 e D11 foram analisadas juntas, pois estas utilizaram a mesma estratégia e, portanto, escreveram expressões algébricas semelhantes e coerentes com as respostas do item (f), como exemplifica as imagens seguintes:

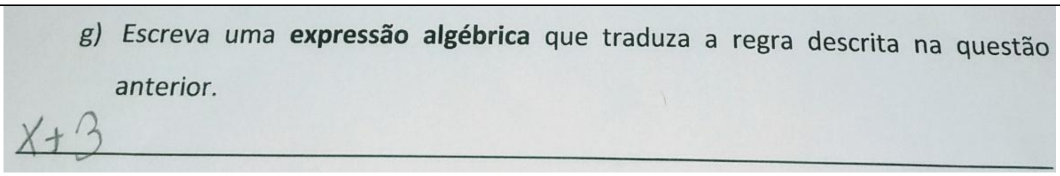
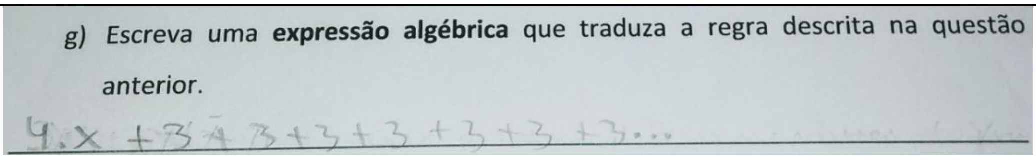
Quadro 40: Imagem da resposta da dupla D4 e D5 para o item (g).

Resposta da dupla D4
 g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior. 1+3X =
Resposta da dupla D4
 g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior. x . 3 + 1

Fonte: Dados da pesquisa

AS duplas D2, D3, D8 e D13 apesar de chegarem a uma expressão algébrica que não permite o cálculo da quantidade de palitos de uma figura numa posição qualquer, se expressaram de modo coerente com a estratégia utilizada no item anterior.

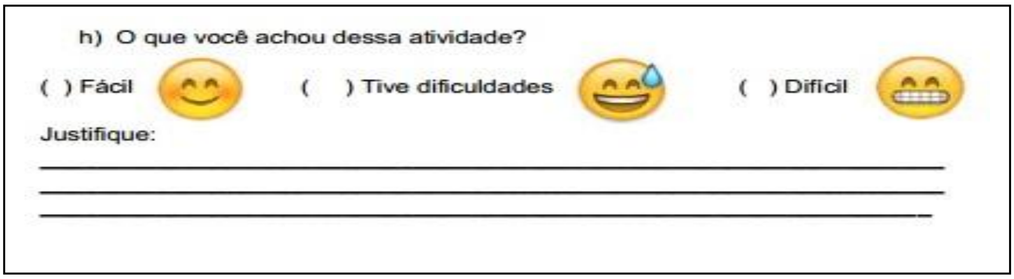
Quadro 41: Imagem da resposta da dupla D2 e D3 para o item (g).

Resposta da dupla D2
 g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior. X+3
Resposta da dupla D3
 g) Escreva uma **expressão algébrica** que traduza a regra descrita na questão anterior. 4.x + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3...

Fonte: Dados da pesquisa

Com relação às duplas D1 e D10, novamente não foram coerentes com as respostas dadas nos itens anteriores, portanto estas não foram analisadas aqui.

4.8 Análise do item (g)



h) O que você achou dessa atividade?

( ) Fácil ( ) Tive dificuldades ( ) Difícil

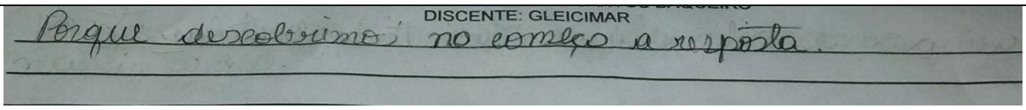
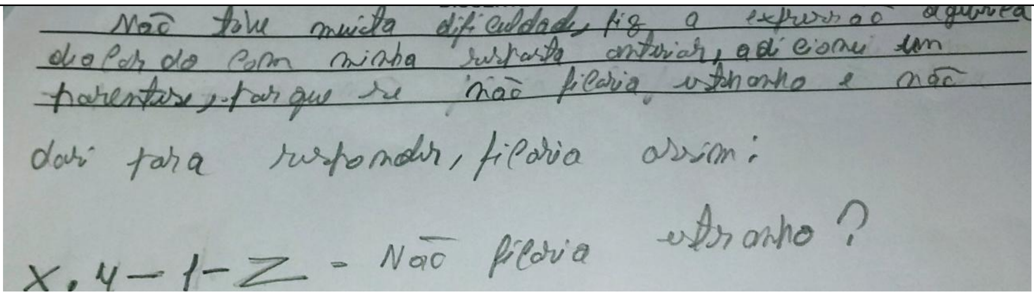
Justifique:

Este questionamento buscava perceber a reação dos alunos diante de um problema diferente dos que são utilizados normalmente em sala.

Desse modo as duplas foram separadas por grupo de acordo com suas respostas: (1) Aqueles que consideraram a atividade fácil; (2) aqueles que tiveram dificuldades na resolução; (3) Aqueles que consideraram a atividade difícil.

No primeiro grupo tivemos as duplas D5, D7 e D11 considerando a atividade fácil.

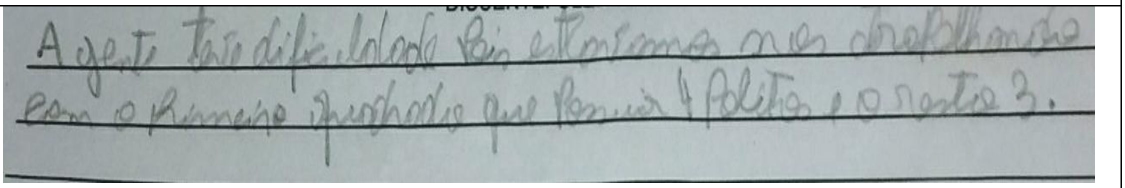
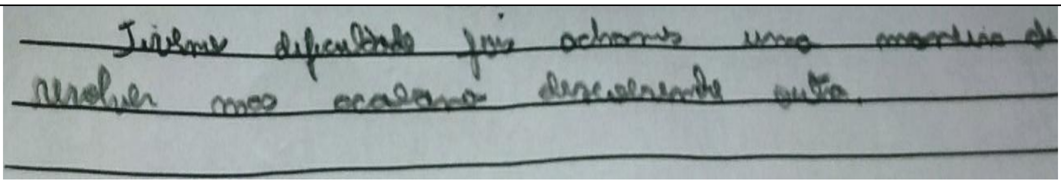
Quadro 42: Imagem da resposta da dupla D7 e D11 para o item (H).

Resposta da dupla D11
 DISCENTE: GLEICIMAR Porque descobrimos no começo a resposta.
Resposta da dupla D7
 Não tive muita dificuldade, fiz a expressão algébrica de acordo com minha resposta anterior, adicionei um parentese, porque se não ficaria estranho e não dari para responder, ficaria assim: X . 4 − 1 − Z - Não ficaria estranho?

Fonte: Dados da pesquisa

No segundo grupo tivemos as duplas D1, D2, D3, D4, D6, D9, D10 e D12 as quais tiveram dificuldade na resolução da atividade. A grande quantidade de duplas nesse grupo leva-nos a perceber que estes alunos não tem o hábito de serem submetidos a esse tipo de questões.

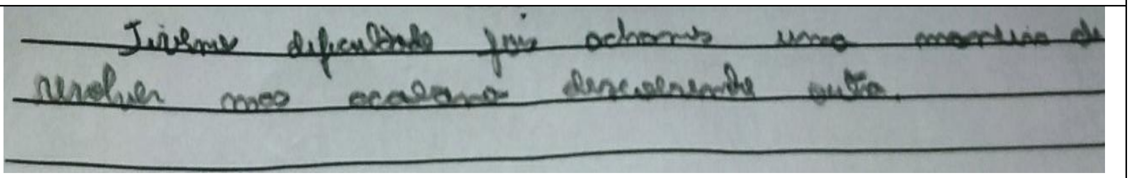
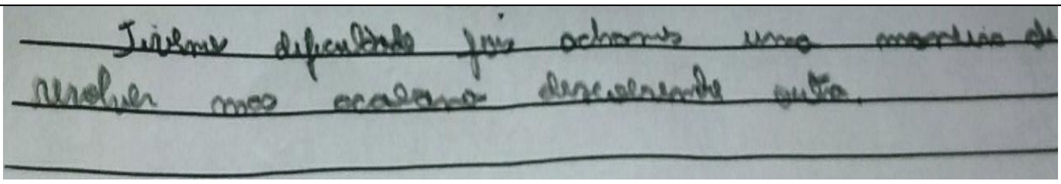
Quadro 43: Imagem da resposta da dupla D4 e D6 para o item (h).

Resposta da dupla D4
 A gente teve dificuldade pois estavamos nos atrapalhando com o primeiro jogador que possuir 4 palitos e o resto 3.
Resposta da dupla D6
 Tivemos dificuldade pois achamos uma maneira de resolver mas acabamos descobrindo outra.

Fonte: Dados da pesquisa

No grupo (3) tivemos a dupla D13 que afirmou achar atividade difícil e, por fim, a dupla D8 que teve a opinião de seus integrantes divididas entre os grupos (1) e (2).

Quadro 44: Imagem da resposta da dupla D13 e D8 para o item (h).

Resposta da dupla D13
 Tivemos dificuldade pois achamos uma maneira de resolver mas acabamos descobrindo outra.
Resposta da dupla D8
 Tivemos dificuldade pois achamos uma maneira de resolver mas acabamos descobrindo outra.

Fonte: Dados da pesquisa

Com a intenção de facilitar a percepção das estratégias que foram utilizadas pelas duplas criamos o quadro abaixo, relacionando as táticas usadas, suas classificações e os itens de cada dupla:

Quadro 45: Estratégias de Generalização, segundo Barbosa (2009), que podem ser mobilizados pelas duplas, em cada item do questionário:

QUESTÕES	DUPLAS												
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13
a	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
b	C	C	C	D3	E	E	TU3	C	D1	D1	C	C	C
c	D3	D1	D1	D3	E	E	TU3	D1	E	D1	D3	TU3	D1
d	TE	TE	TE	TU1	E	TU3	TU3	TU1	TU1	D3	D3	TU3	D1
e	TU1	TE	D1	TU3	E	E	TU3	TU3	TU1	TU3	E	TU3	C
f		D1	D1	E	E	E	E	D1	D1		E	E	D1
g		D1	D1	E	E	E	E	E	TE		E	E	E

C: contagem; TU1: termo unidade sem ajuste; TU2: termo unidade com ajuste numérico; TU3: termo unidade com ajuste contextual; D1: diferença recursiva; D2: múltiplo da diferença sem ajuste; D3: múltiplo da diferença com ajuste; E: explícita e TE: tentativa e erro.

Fonte: autoria própria

Voltando a nossa questão de pesquisa que é: *Quais as estratégias de generalização utilizadas por alunos do sétimo para resolver problemas envolvendo padrão matemático?*

Por meio do quadro acima podemos perceber com clareza as estratégias mais utilizadas por cada dupla em todos os itens da atividade. A estratégia mais utilizada foi a *explícita*, seguida da *contagem* e da *diferença recursiva*. Além disso, podemos notar o avanço de algumas duplas no decorrer da atividade, como exemplo a dupla D13 que iniciou com a estratégia *contagem*, usou a *diferença recursiva, mas*, ao final conseguiu escrever uma regra imediata para determinar a quantidade de palitos de uma figura qualquer aplicando a estratégia *explícita*. As duplas D7, D8, D11 e D12 também tiveram desenvolvimentos análogos à dupla D13. As duplas D5 e D6, notamos que essas tiveram maior facilidade em desenvolver uma regra para a resolução, como vimos, essas duplas usaram a estratégia *explícita* desde o item (b) da atividade. Em contrapartida percebemos que as duplas D2 e D3 começaram com a estratégia *contagem* nos itens (a) e (b) e ao final da atividade ainda utilizavam a estratégia *recursiva*. O último fato servirá de incentivo para a professora/pesquisadora continuar a trabalhar com os problemas envolvendo padrões matemáticos. De modo que esses problemas sejam ferramentas para ensinar diversos conteúdos matemáticos, visando tornar os alunos capazes de realizar generalizações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalhou possibilitou a investigação das estratégias que alunos do sétimo do ano das séries finais do ensino fundamental utilizam para resolver situações problema envolvendo padrões matemáticos, assim como permitiu que a professora percebesse que resolver esse tipo de problema não é tarefa impossível para alunos de ensino fundamental. Com os resultados obtidos pretende-se, inicialmente para a autora da pesquisa inserir as atividades com problemas envolvendo padrões matemáticos em suas aulas e segundo, levar outros professores a experimentar ensinar utilizando problemas com generalização de padrão.

Em geral, foi possível observar que:

- Os alunos não estão acostumados a resolver este tipo de atividade na sua vida escolar;
- Os problemas com generalização de padrão atraem a atenção dos alunos, contribuindo para que estes se sintam desafiados.
- Os problemas com padrões matemáticos podem ser utilizados em sala de aula com alunos do sétimo ano do ensino fundamental;
- Na aprendizagem através de problemas com generalização de padrão os alunos são construtores de seus conhecimentos;

Os resultados citados confirmam a fala de Vale (2012) a respeito da importância do padrões no ensino de matemática, pois de acordo com ela,

> “Os padrões permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da matemática porque apelam fortemente a que desenvolvam o seu sentido estético e a criatividade, estabeleça, várias conexões entre os diferentes temas, promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas, desenvolvam a capacidade de classificar e ordenar informação e compreendam a ligação entre a matemática e o mundo em que vivem.”
> (p.10)

A presente pesquisa tinha como problemática: *Quais as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas envolvendo padrões?* Foi possível constatar que os alunos do sétimo ano utilizam as estratégias descritas por Barbosa (2009). De tal forma que vários alunos já possuem habilidades para realizar generalizações distantes e algébricas.

A análise dos resultados possibilitou perceber que a estratégia mais utilizada pelos alunos foi a explícita, seguida da contagem e da diferença recursiva tal como acontece na pesquisa realizada por Pereira e Fernandes (2012). De acordo com os autores os quais trabalharam com a mesma faixa etária de alunos participantes deste trabalho, em média 12 anos; esse resultado se dá porque a estratégia explícita é a que mais se adéqua com a faixa etária dos alunos, constituindo uma estratégia de generalização que lhes permite calcular de imediato qualquer termo da sequencia. Com relação aos tipos de generalização vimos que a mais utilizada é a algébrica, porém podemos verificar que muitos só conseguem realizar generalizações próximas.

O objetivo geral da pesquisa foi investigar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas envolvendo padrões. O objetivo foi alcançado, no sentido que o foi possível analisar as respostas dadas por cada grupo de modo a classifica-las em relação a estratégia utilizada, assim como debruçar-se para entender o pensamento dos alunos em cada questão, ato que não é comum em nosso dia a dia de prática docente.

Este trabalho pode contribuir para que outros professores percebam que o trabalho através da resolução de problemas com padrões matemáticos é possível, além de ser importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. E que o ensino de álgebra através da resolução de problemas com padrões pode ser o diferencial que precisamos para desenvolver o pensamento algébrico dos nossos alunos bem como fazê-los sentir prazer em estudar matemática.

Sendo assim, acreditando que nós professores, podemos fazer muito para que nossos alunos tornem-se capazes de compreender o meio em que vivem, temos a tarefa de estar em constantes buscas para envolvê-los com conhecimentos matemáticos de forma significativa, desafiadora e prazerosa.

REFERÊNCIAS

BAQUEIRO, G. D. S. *Achados sobre generalização de padrão ao "garimpar" pesquisas brasileiras de educação matemática (2003-2013).* Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2016. São Paulo.

BARBOSA, Ana Cristina Coelho. *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos d 2° ciclo do ensino básico.* Dissertação de Doutoramento em Estudos da Criança – Instituto de Estudos da Criança. Universidade do Minho. Minho – Portugal, 2009. Disponível em: <https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10561/1/tese.pdf>. Acesso em: 13 de agosto de 2017.

BARBOSA, Ana Cristina Coelho. *Generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo no 6° ano de escolaridade*. Viana do Castelo - Portugal. 2010. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/19.Barbosa.pdf>. Acesso em 31 de agosto de 2017.

EDUCAÇÃO, *Ministério. Parâmetros curriculares nacionais – Matemática*. Mec/SEF Brasília, 1997.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sergio. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3ª ed. Revista, Campinas, SP: Autores Associados, 2009. – (Coleção formação de professores).

GIL, Antonio Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6° ed. São Paulo: Ed. Atlas S. A., 2008.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. *Fundamentos de metodologia científica.* 5ª ed. São Paulo: Ed. Atlas S. A., 2003. 310 p. Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/olivianeta/disciplinas/copy_of_historia-i/historia-ii/china-e-india>. Acesso em: 6 de agosto de 2017.

NEGRÃO de LIMA. R. C. *Avaliação em matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas*. Dissertação de mestrado em Educação - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mestredu/images/stories/downloads/dissertacoes/2006/2006%20-%20LIMA,%20Roseli%20Cristina%20Negrao%20de.pdf>. Acesso em: 13 de agosto de 2017.

PEREIRA, Manuel de Sousa; FERNANDES, José António. *Estratégias de generalização de padrões de alunos do 7° ano de escolaridade.* São Paulo, 2012. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo9.pdf>. Acesso em: 6 de agosto de 2017.

PINHEIRO, Patrícia Aparecida. *Introdução ao estudo da Álgebra no Ensino Fundamental*. São Carlos, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/843/2011_00619_PATRICIA_APARECIDA_PINHEIRO.pdf?sequence=1>. Acesso em: 26 de agosto de 2017.

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. *Métodos de Pesquisa.* 1º ed. Rio Grande do Sul: UFRGS Editora, 2009. 120 p. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 13 de agosto de 2017.

TREVISANI, Fernando de Mello. *Estratégias de generalização de padrões matemáticos.* Dissertação de Mestrados – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro – SP, 2012. Disponível em: < http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/19.Barbosa.pdf>. Acesso em: 26 de agosto de 2017.

VALE, Isabel. *As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos.* Viana do Catelo – Portugal. 2012. Disponível em: <http://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/493/446>. Acesso em: 13 de agosto de 2017.

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T. , BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. *Padrões em matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico*. Lisboa: Texto, 2011.